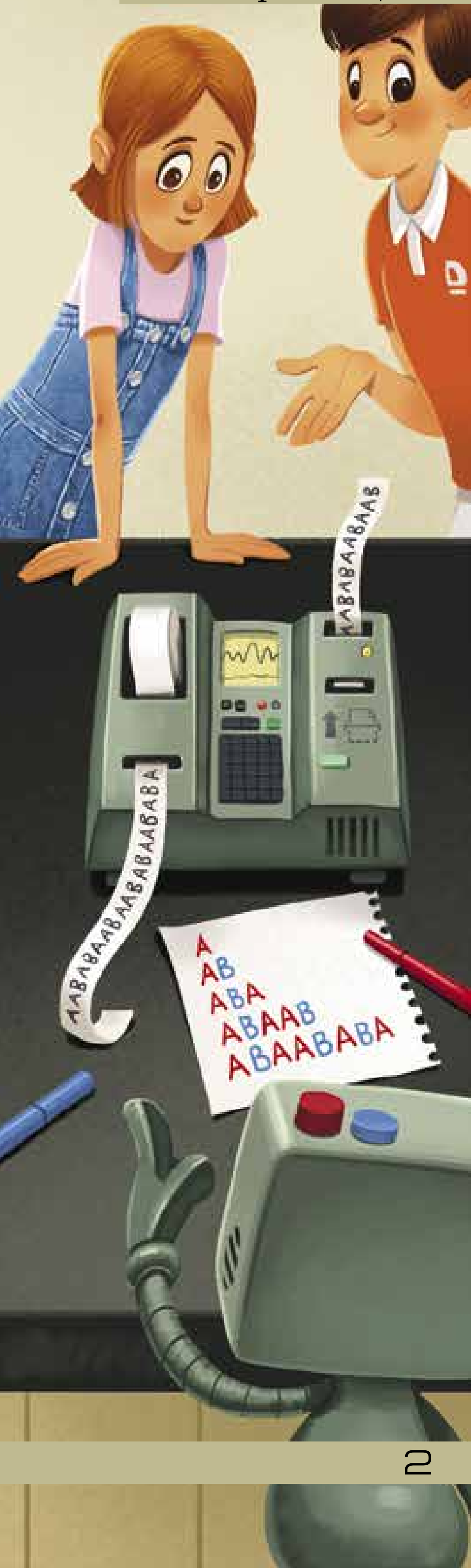
Виктор Клепцын

СлоВА на ленте



Зайдя в гости к Квантику, Женя и Мика обнаружили у него на столе странное устройство. На его ленте было напечатано *ABAAB*.

– А что эта машина делает? – спросил Мика.

– Она читает одну ленту и печатает другую, – начал объяснять Квантик. – Каждый раз, встретив на входной ленте букву *A*, на выходной ленте машина печатает *AB*, а встретив на входной ленте букву *B*, машина печатает *A*. Вот смотрите!

Квантик взял ленту со словом *ABAAB* и перенёс её к считывающей части машины. Машина загудела, потянула ленту и напечатала *ABAABABA*.

– Я начал с самого простого слова, буквы *A*, – продолжил Квантик. – Из него машина сделала *AB*, а из него *ABA*; потом *ABAAB*, а дальше вы видели.

– А что вообще можно про эти слова сказать? – задумалась Женя и переписала их на доску.

– Ага! Каждое новое слово всегда продолжает предыдущее! – заметила она.

– Верно! А доказать сможете? – спросил Квантик.

– Давай с примера начнём, – вмешался практичный Мика. – Вот слово *ABA* начинается со слова *AB*. Следующее за ним слово, *ABAAB*, получается, если машина читает *ABA*. Но при этом сначала она прочтёт *AB* и напечатает как раз *ABA*.

– Точно! Так будет и дальше, – поддержала Женя. – Пусть мы уже знаем, что n-е слово продолжает предыдущее, $(n-1)$-е. Чтобы получить $(n+1)$-е слово, мы подаём на вход n-е слово. Машина сначала прочтёт его первую часть, то есть $(n-1)$-е слово. И, читая его, по определению напечатает n-е слово, с которого $(n+1)$-е слово и начнётся.

– Правильно, – подтвердил Квантик. – Такое рассуждение, когда каждое утверждение выводится из предыдущего, образуя этакую «цепочку вывода», называется *математической индукцией*. Ещё для неё нужно проверить базу: самое-самое первое утверждение, чтобы цепочке было откуда начинаться. Но раз вы уже знаете, что второе слово, *AB*, начинается с первого, *A*, то так будет и дальше: третье будет начинаться со второго, четвёртое с третьего и т.д. –

каждое следующее будет продолжать предыдущее.

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– А что ещё об этих словах можно сказать?

– Первое, что приходит в голову, это посмотреть на длины этих слов, – предложила Женя. – Они становятся всё длиннее. Можно посмотреть, как именно.

После недолгих подсчётов на доске появилась таблица:

Слово	Длина
A	1
AB	2
ABA	3
ABAAB	5
ABAABABA	8
ABAABABAABAAB	13

– Это же знаменитая последовательность Фибоначчи! – сказала Женя. – Она начинается с двух единиц, а каждое следующее число – сумма двух предыдущих.

Мика на всякий случай записал начало последовательности Фибоначчи на другой половине доски:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 = 8 + 5, \ldots$$

– Точно! Но она тут со сдвигом: длина n-го слова – это $(n+1)$-е число Фибоначчи, – подтвердил он. – Только вот как это доказать?

– Хороший вопрос, – задумалась Женя. – Давай посмотрим, как будут расти длины наших слов. Когда машина читает очередное слово, то из каждой буквы *A* получается две буквы нового слова, а из каждой буквы *B* только одна. Но проблема в том, что мы не знаем, сколько в слове букв *A* и *B* по отдельности!

– Ну, если не знаем, то почему бы нам это не узнать? – с энтузиазмом ответил Мика. – Давай подсчитаем, сколько в каких словах каких букв!

В таблице на доске появились два новых столбца, N_A и N_B, для количеств букв *A* и *B* соответственно – и ещё одна строчка: машина как раз только что закончила печатать слово *ABAABABAABAAB*:

Слово	Длина	N_A	N_B
A	1	1	0
AB	2	1	1
ABA	3	2	1
ABAAB	5	3	2
ABAABABA	8	5	3
ABAABABAABAAB	13	8	5

– Так это те же последовательности, только со сдвигом! – заметила Женя. – Ну конечно! Ведь из каждой буквы предыдущего слова всегда получается ровно одна буква *A*. Поэтому букв *A* в новом слове всегда столько же, какова длина предыдущего слова.

– А буква *B* получается только из буквы *A*, – подхватил Мика. – Значит, в новом слове их столько, сколько букв *A* в предыдущем, то есть какова длина пред-предыдущего!

– Но тогда у нас всё получается! – обрадовалась Женя. – В новом слове столько букв *A*, какова длина предыдущего, и столько букв *B*, какова длина пред-предыдущего. Значит, его длина – это сумма этих длин, и это в точности соотношение, задающее последовательность Фибоначчи. Так что если их длины были числами Фибоначчи, то и длина нового слова будет следующим числом Фибоначчи.

– Верно, – подтвердил Квантик. – И вы опять применили индукцию! Правда, поскольку вы используете два предыдущих утверждения, нужно проверить два первых утверждения «цепочки». Но мы уже знаем, что первые два слова (*A* и *AB*) имеют длины 1 и 2, и это нужные нам числа Фибоначчи.

– А ещё что-нибудь красивое можно про эти слова сказать? – с интересом спросил Мика.

– Конечно! – ответил Квантик. – Вы уже заметили, что следующее слово продолжает предыдущее. А что идёт в следующем слове за этим предыдущим?

– Посмотрим! –взяла мел Женя. – Вот у нас слово *ABAABABAABAAB*; отделяем *ABAABABA*, остаётся…

$$\begin{array}{l} A \\ AB \\ ABA \\ \boxed{ABAAB} \\ ABAABABA \\ ABAABABA\ \ \boxed{ABAAB} \end{array}$$

– Да это же пред-предыдущее слово! – удивилась она. – То есть нашу последовательность слов можно ещё определить так: каждое новое слово в ней – это предыдущее, за которым идёт пред-предыдущее.

– Правильно! А как это доказать?

– Как и раньше, по индукции! – ответила Женя. – Ведь если мы знаем, что n-е слово – это $(n-1)$-е, за которым идёт $(n-2)$-е, и подаём его на вход машине, то получим по определению $(n+1)$-е слово. Но сначала машина (читая $(n-1)$-е) напечатает n-е, а потом (читая $(n-2)$-е) напечатает $(n-1)$-е.

– Молодец, – похвалил Квантик. – И заметьте: раз все слова продолжают друг друга, есть некое бесконечное слово, началами которого они все являются:

ABAABABAABAABABAABABAABAABABAABAAB...

Это слово называется *словом Фибоначчи*. А что будет, если написать его на бесконечной ленте (допустим, у нас есть пара таких) и подать машине на вход?

– Сейчас... – задумалась Женя. – Прочтя *A*, машина напечатает *AB*; прочтя *AB*, напечатает *ABA*... Ой, да ведь она напечатает это же самое слово!

– Именно так. Кстати, слово Фибоначчи – единственное слово с таким свойством. Можешь разобраться почему? – продолжил спрашивать Квантик.

– Если подать на вход слово, начинающееся с *B*, то вывод будет начинаться всё равно с *A*, и слово на выходе будет другим, – продолжила рассуждать вслух Женя. – Значит, слово должно начинаться с *A*. Но тогда машина, прочитав эту букву, напечатает *AB*, значит, слово начинается с *AB*. А значит, и с *ABA*, которое машина напечатает, прочтя *AB*, и так далее; да это же почти то же самое рассуждение!

– Всё правильно, – подтвердил Квантик. – Кстати, слово Фибоначчи обладает и другими замечательными свойствами. Например, оно не периодично, и мы ещё увидим почему. Но оно *квазипериодично*: любой кусочек, который встречается в нём хоть где-нибудь, встречается регулярно.

– А почему? – заинтересовалась Женя.

– Начнём с простого: можете ли вы что-нибудь сказать про то, как часто встречается буква *A*?

– В тех словах, что мы уже выписали, ни разу даже двух букв *B* подряд не было, – отметил Мика.

– Очень хорошо, а как это доказать?

– Надо чем-нибудь воспользоваться... – задумалась Женя. – Мы знаем, что машина по слову Фибоначчи печатает его же. Но буква *B* может появиться, только если машина прочитала букву *A* и напечатала *AB*. Значит, перед любой буквой *B* идёт буква *A*!

– Замечательно; а что, если мы спросим про слово *AB*? – усложнил задачу Квантик.

– Машина печатает его, прочитав букву *A*, – уверенно ответил Мика. – Но из любых двух соседних букв хотя бы одна – это *A*. Значит, можно разрезать слово Фибоначчи на кусочки *AB* и *A*, и из двух последовательных кусочков хотя бы один будет нужным.

– Правильно. Или можно применить машину ещё раз, и тогда всё слово Фибоначчи разрежется на кусочки *ABA* и *AB*, в каждом из которых есть нужное нам подслово, – согласился Квантик. – А что, если мы ищем кусочек *AAB*?

– Давай его найдём где-нибудь. Вот он, в слове *ABAAB*, – сориентировалась Женя. – Но если мы ещё несколько раз применим нашу машину, слово Фибоначчи разрежется на слова *ABAABABA* и *ABAAB*, и в каждом из них нужный нам кусочек есть. Ой, а ведь это рассуждение и в других случаях сработает?

– Да, – подтвердил Квантик. – Любое подслово *X*, которое где-нибудь в слове Фибоначчи встречается, содержится в одном из тех слов, которые получаются из буквы *A* чередой прогонов через нашу машину. И всё слово Фибоначчи разрезается на его копии и копии следующего за ним слова. Но раз следующее слово начинается с предыдущего – то в каждом из таких кусочков встречается слово *X*. Вот мы всё и доказали!

– Кстати, – продолжил Квантик, – аналог такого слова есть и в геометрии, в замощениях плоскости. Возьмём правильный пятиугольник *ABCDE* и проведём в нём диагонали *AC*, *BD* и *CE*. Треугольники, которые в результате образуются, обладают похожим замечательным свойством: из красного и синего треугольников можно сложить больший треугольник, подобный синему, а из двух красных и синего (или, что то же самое, добавив ещё один меньший красный к большему синему) – больший, подобный красному.

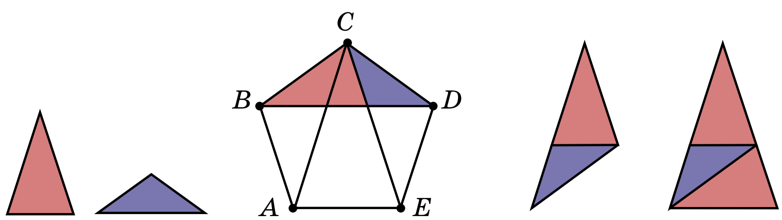


Рис.1. Слева: красный и синий треугольники по отдельности. В центре: их появление в правильном пятиугольнике. Справа: сложенные из них подобные им бо́льшие треугольники

Квантик нарисовал соответствующую картинку (рис. 1), и Женя подхватила:

– А дальше мы можем продолжить? Собрать из этих треугольников ещё бо́льшие треугольники?

– Можем, – подтвердил Квантик. – Кстати, это всё равно, что разбить каждый красный и синий треугольники на более мелкие, а потом увеличить всю картинку. И если повторить такую замену много-много раз, то получится *квазипериодичное* разбиение угла в 36° на красные и синие треугольники (рис. 2). А если объединить 10 таких углов, то и всей плоскости!

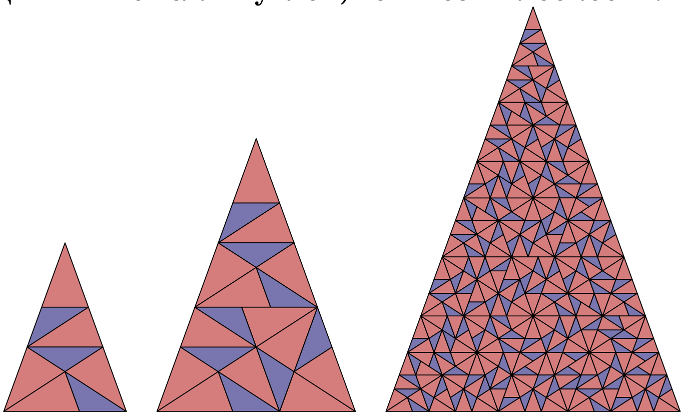


Рис. 2. Красный треугольник после двух, трёх и пяти замен

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– Квазипериодические мозаики были известны с 1960-х годов, в 1970-х появились похожие на это разбиение мозаики Пенроуза (рис. 3). А в 1982 году Дан Шехтман открыл устроенные подобным образом вещества – *квазикристаллы*, – что в 2011-м принесло ему Нобелевскую премию по химии!

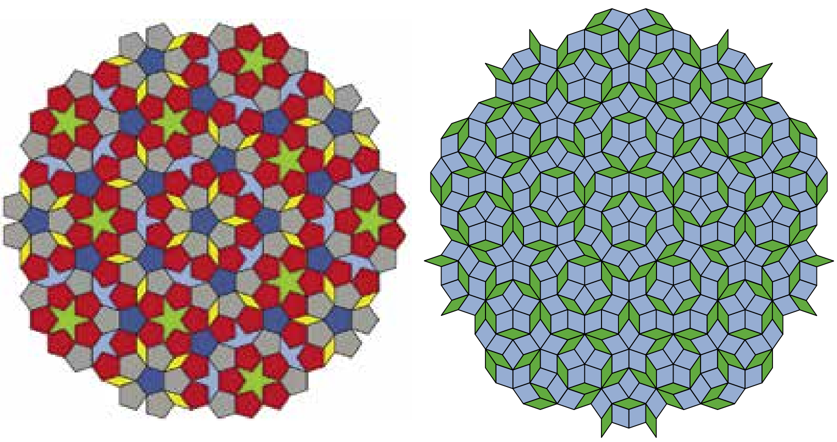


Рис. 3. Мозаики Пенроуза. Автор: Inductiveload, Викисклад

Окончание в следующем номере