Игорь Акулич

Две большие разницы

– А сегодня, Даня, у тебя вид недовольный... Какая тут причина, и где же корень зла?

– Не знаешь где? Ты, Федя, и есть этот самый корень!

– Я?

– Конечно. Предлагаешь задачи, даешь к ним неверные решения, я тебе верю, а потом оказывается – всё не так!

– Что за обвинения? Конкретику давай!

– Пожалуйста. Вот та самая задача[1]:

В некоторый момент времени относительная скорость движения концов часовой и минутной стрелок (то есть скорость, с которой меняется расстояние между концами стрелок) оказалась равной 6 мм/с. Может ли она в какой-то другой момент оказаться равной 5 мм/с?

А вот и твоё решение. В нём мы исходим из того, что:

– угловая скорость вращения часовой стрелки в 12 раз меньше, чем минутной;

– часовая стрелка всегда *короче* минутной.

Следовательно, если скорость движения конца минутной стрелки равна v, то скорость движения конца часовой стрелки заведомо *меньше* $\frac{1}{12}v$. Поэтому относительная скорость концов стрелок лежит в пределах от $\frac{11}{12}v$ до $\frac{13}{12}v$, и отношение относительных скоростей в любые два момента времени больше $\frac{11}{13}$, но меньше $\frac{13}{11}$. А так как $\frac{5}{6} < \frac{11}{13}$, то относительная скорость не может составить 5 мм/с.

– По-моему, безупречно.

– Как бы не так! Ведь что такое относительная скорость двух движущихся точек? Как известно, чтобы её определить, надо связать систему отсчёта с одной из точек (как бы сделать её «неподвижной»), и тогда скорость второй точки в этой системе отсчё-

[1] См. статью «Федя, Даня и Кэрролл» из 12-го номера «Квантика» за 2016 год.

та как раз будет той самой относительной скоростью движения точек. Верно?

– Верно.

– А ты что в условии написал? Посмотри – в скобках! По твоему мнению, относительная скорость есть скорость, *с которой меняется расстояние между концами стрелок*. А это, как говорят в Одессе, две большие разницы!

– Неужели?

– Вот именно! Приведу простой пример. Рассмотрим на часах одну стрелку длиной r, которая вращается с угловой скоростью ω. Какова скорость движения конца стрелки относительно оси вращения?

– Понятно, какая: ωr.

– Но ведь расстояние между осью вращения и концом стрелки *постоянно*. Поэтому скорость изменения этого расстояния равна *нулю* – это и будет относительная скорость *согласно твоему определению*!

– ???

– Ага, рот раскрыл! Вот так и оставайся, поделом тебе.

– Да, похоже, ты прав... Скорость изменения расстояния – это не совсем то, что принято считать относительной скоростью.

– Совсем не то! И если уж в условии тебя угораздило дать иное определение относительной скорости (в твою честь уместно назвать её *Ф-скоростью*), то и решение должно соответствовать именно ему. А у тебя не соответствует! Так что надо искать верное решение – другого выхода нет.

– Может, поищем?

– Об этом я как раз и думаю. Но что-то пока не выходит. Оттого-то и грусть-тоска меня съедает.

– Погоди-ка, по-моему, всё не так сложно. Когда стрелки направлены в одну сторону, с какой скоростью меняется расстояние?

– Не знаю. Если Ф-скорость ненулевая, то расстояние в данный момент или возрастает, или убывает.

– Точно! Но когда стрелки направлены одинаково, расстояние между их концами наименьшее возможное. Чуть позже и чуть раньше расстояние больше, а значит, ни убывать, ни возрастать не может.

– Значит, Ф-скорость в этот момент – ноль?

– Да. И потому в процессе плавного перехода от 6 мм/с к нулю обязательно наступит момент, когда она примет и *промежуточное* значение 5 мм/с! Ведь не может же она, непрерывно меняясь, через него «перепрыгнуть»!

– Получается, ответ в задаче противоположный: «может»!

– Конечно, так оно и есть. Сожалею, что я тебя ввёл в заблуждение, но повинную голову меч не сечёт – тут топор нужен. С другой стороны, возникает вопрос: при каком угле между стрелками достигается максимальная возможная Ф-скорость, если заданы длины стрелок r и R...

– ...и угловая скорость часовой стрелки ω!

– А вот это, полагаю, задавать не надо. Мы ведь и так знаем, что минутная стрелка проходит один оборот за час, так что значение ω легко вычисляется.

– Верно. Ну, что – подумаем?

– Подумаем!

Не будем ждать, пока наши герои решат эту задачу, и сразу опишем ответ. В системе отсчёта, в которой минутная стрелка неподвижна, конец часовой движется также по окружности радиуса r. Скорость изменения расстояния будет самой большой, когда конец короткой стрелки удаляется или приближается ровно в направлении на конец длинной стрелки. То есть когда конец короткой стрелки находится в точке касания окружности с прямой, проходящей через конец длинной стрелки. Чтобы найти угол, нужна тригонометрия. От угловой скорости ответ не зависит, лишь бы угловые скорости были постоянны.

Художник Мария Усеинова