XLI ТУРНИР ГОРОДОВ

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

16 февраля и 1 марта 2020 года прошёл весенний тур XLI Турнира городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов, кроме самой сложной задачи. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов. Подробнее см. сайт **turgor.ru**

Базовый вариант

1 (4). Карта Квадрландии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

Михаил Евдокимов

2 (4). Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

Егор Бакаев

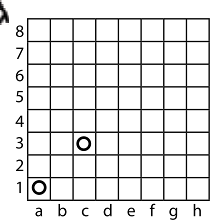
3 (4). На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B – точка пересечения высот треугольника DPQ.

Егор Бакаев

4 (5). Целое число n таково, что уравнение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=n$ имеет решение в целых числах x, y, z. Докажите, что тогда и уравнение $x^2+y^2-xy=n$ имеет решение в целых числах x, y.

Александр Юран

5 (5). На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.



Владимир Ковальджи

Сложный вариант

1 (4). Существует ли число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?

Михаил Евдокимов

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

2 (5). Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич – треть всех голов и ещё две, Алёша Попович – четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею? ($41!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 41$.)

Алексей Заславский

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если

а) (4) $N=19$; **б) (3)** $N=20$?

Михаил Малкин

4 (8). Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N\times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

Максим Дидин

5 (9). Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

Александр Юран

6 (9). У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

Михаил Евдокимов

Художник Сергей Чуб