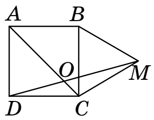
## НАШ КОНКУРС, VII тур («Квантик» № 3, 2020)

**31.** *Мимо пассажира «Ласточки», едущей с постоянной скоростью, встречный «Сапсан» пронёсся за 3 секунды, а попутный «Сапсан» – за 7 секунд. Длины и скорости «Сапсанов» были одинаковы. За сколько секунд этот пассажир проедет мимо такого же, но стоящего «Сапсана»?*

**Ответ:** 10,5 секунд. Примем длину «Сапсана» за 1. Тогда скорость встречного «Сапсана» относительно пассажира равна $\frac{1}{3}$ в секунду, а попутного – $\frac{1}{7}$. То есть $\frac{1}{3}$ – это сумма скоростей «Сапсана» и «Ласточки», а $\frac{1}{7}$ – разность. Тогда удвоенная скорость «Ласточки» равна $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=$ $=\frac{4}{21}$ в секунду, и пассажир «Ласточки» проедет мимо стоящего «Сапсана» за $\frac{21}{2}$ секунд.

**32.** *На стороне $BC$ квадрата $ABCD$ во внешнюю часть построен равносторонний треугольник $BMC$. Отрезки $AC$ и $MD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OA=OM$.*




Треугольник $DCM$ равнобедренный с углом при вершине $C$, равным $90°+60°=150°$. Значит, угол $CMD$ равен $(180°-150°)/2=15°$. Тогда углы $BMO$ и $BAO$ равны по 45°. С другой стороны, углы $MAB$ и $AMB$ тоже равны (по 15°), откуда равны углы $OAM$ и $OMA$, то есть треугольник $AOM$ равнобедренный, что и требовалось.

**33.** *Три разбойника украли пять алмазов (возможно, разного веса) и решили разделить их между собой поровну по весу, не распиливая на куски. Они отмерили треть, но остальные алмазы нельзя было разделить на две равные части. Докажите, что разбойникам не удастся поделить алмазы, даже если они смогут отмерить треть по-другому.*

Пусть разбойникам удалось поделить алмазы на три части. Так как алмазов 5, одна из частей будет состоять из одного алмаза, назовём его Брусок. Но тогда алмазы можно было разделить и при первой попытке, так как Брусок либо был исходной отмеренной третью, либо был среди оставшихся $\frac{2}{3}$ алмазов, которые, тем самым, делятся на две части по $\frac{1}{3}$. Противоречие.

**34.** *Какое наибольшее количество флажков, изображённых на рисунке 1, можно разместить в квадрате а) $8\times 8$; б) $14\times 14$? Флажок должен располагаться по линиям сетки. Никакие два флажка не должны иметь ни одной общей точки. В качестве примера на рисунке 2 показано, как в квадрате $3\times 3$ можно разместить три флажка.*


Рис. 1

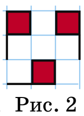
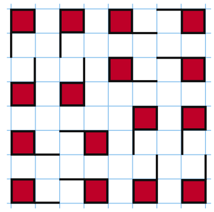


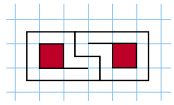
Рис. 2

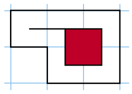
**Ответ:** а) 16; б) 45.

а) На рисунке справа приведён пример для 16 флажков.

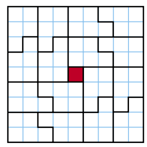


Почему нельзя больше? Обернём каждый флажок полоской шириной в полклетки, как на рисунках ниже. Получится фигурка из 5 клеточек – пентамино, но в сдвинутой клетчатой сетке. Её узлы – это центры клеточек исходной сетки.

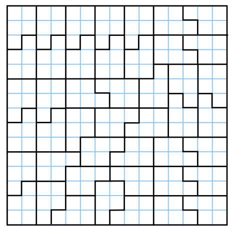




Для любой расстановки флажков получившиеся из них пентамино не пересекаются и содержатся в квадрате, полученном из исходного добавлением «вокруг» полоски в полклетки. То есть из квадрата $8\times 8$ получится квадрат $9\times 9$ с пентамино. Расстановка пентамино, соответствующая нашему примеру, приведена справа. Поскольку площадь квадрата – 81, пентамино может быть не больше $\frac{81}{5}=16\frac{1}{5}$, то есть 16 флажков – максимум для квадрата $8\times 8$.



б) Аналогично, перейдём к размещению пентамино в квадрате $15\times 15$. Пример для 45 пентамино приведён справа. Больше быть не может, так как покрыт весь квадрат.



**35.** *В гирлянде n лампочек и n кнопок с номерами. По инструкции, 1-ю кнопку надо соединить с одной лампочкой, 2-ю – с двумя, 3-ю – с тремя, и т. д., но с какими именно лампочками соединяется каждая кнопка, решает пользователь. Сначала все лампочки погашены. Нажатие на любую кнопку меняет состояние всех соединённых с ней лампочек на противоположное (горящие лампочки гаснут, не горящие – зажигаются).*

*Коля уверен, что можно так соединить кнопки с лампочками, чтобы, нажав нужные кнопки, можно было получить любую комбинацию горящих и не горящих лампочек. Петя же считает, что любую такую комбинацию можно получить, как ни соединяй лампочки и кнопки – лишь бы по инструкции.*

*а) При каких n прав Коля?*

*б) При каких n прав Петя?*

**Ответ:** а) при всех $n$; б) 1 или 2.

а) Соединим $k$-ю кнопку с первыми $k$ лампочками. Тогда, чтобы получить заданную комбинацию горящих лампочек, будем идти от последней лампочки к первой. Приводя $k$-ю лампочку в нужное положение нажатием (или не-нажатием) $k$-й кнопки, мы не затронем уже правильно выставленные следующие лампочки.

б) Для одной лампочки задача очевидна, а для двух лампочек – сводится к пункту а).

Пусть лампочек хотя бы три. Назовём первые две из них близняшками. Соединим 1-ю кнопку с 3-й лампочкой (не близняшкой), а остальные по правилу: $k$-ю кнопку соединяем с первыми $k$ лампочками (обе близняшки среди них). Тогда мы не сможем получить комбинацию, в которой одна близняшка горит, а вторая – нет.

## ДЕРЕВЬЯ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

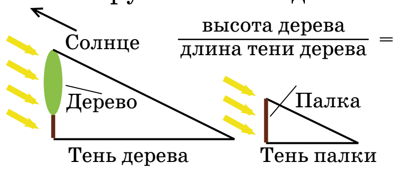
**(«Квантик» № 4, 2020)**

**1.** Солнце в нашей стране в зените не бывает. Поэтому тень от деревьев с шарообразной кроной получается овальная, а точнее, эллипсовидная: ведь тень от шара на горизонтальной поверхности, если светить не сверху, а под углом, будет эллипсом. У деревьев с плоской (зонтичной) кроной (обычно это южные «родственники» сосны, в том числе пиния) тень своей формой повторяет крону. А если крона плоская и круглая – тень тоже будет круглой. Тень от ёлки – треугольник с основанием, как диаметр ёлочной кроны внизу, а длина тени больше высоты ёлки. Точнее, ёлочная тень – это треугольник с «приклеенным» к нему кругом: тень верхней части кроны + тень нижних веток, образующих практически ровный горизонтальный круг.

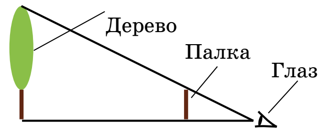
Солнце движется по небу – и тени деформируются: овалы сначала «укорачиваются», потом – после полудня – обратно «удлиняются». Лишь тень от круга как была кругом, так и остаётся – только двигается, и размер её не меняется.

**2.** Высоту дерева можно измерить, используя идею подобия треугольников. В солнечный день дерево во столько же раз короче (или длиннее) своей тени, во сколько раз любая палка короче (или длиннее) тени этой палки. Выберите палку повыше (не меньше 1 м, а то будет очень неточно), воткните её в землю или попросите товарища подержать – и вперёд. Или используйте столб, до верха которого вы можете дотянуться. Высоту палки или столба измерьте обычной рулеткой или длинной линейкой.

$$\frac{\text{высота дерева}}{\text{длина тени дерева}} = \frac{\text{высота палки}}{\text{длина тени палки}}$$




Если пасмурно, можно обойтись одной палкой. Поставьте её на подходящем расстоянии от дерева и найдите такое место, откуда, наклонившись к самой земле, вы видите вершину палки и вершину дерева на одной и той же высоте (палка «закрывает» дерево). Опять получились подобные треугольники! Во сколько раз расстояние от вашего пункта наблюдения до дерева больше расстояния до палки, во столько же раз дерево выше палки.



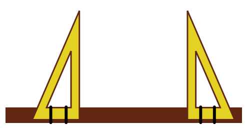

$$\frac{\text{высота дерева}}{\text{расстояние до дерева}} = \frac{\text{высота палки}}{\text{расстояние до палки}}$$

Некоторые ребята постарше меряют транспортиром угол, под которым видят дерево снизу, и вычисляют высоту дерева, пользуясь умным словом «тангенс». Но транспортир маленький, и точность будет заметно хуже из-за больших погрешностей измерений.

Диаметр проще всего измерить, опять используя подобие, на этот раз окружностей. Ведь диаметры любых двух окружностей отличаются во столько же раз, во сколько раз отличаются их длины. С помощью любой верёвочки или нитки измерьте окружность ствола («обхват») дерева, а для сравнения возьмите любой круг похожего размера – например, кастрюлю. Вот формула:

$$\frac{\text{диаметр дерева}}{\text{обхват дерева}} = \frac{\text{диаметр кастрюли}}{\text{обхват кастрюли}}$$

Но есть и другие способы. Например, Аня Ли, учась в 4-м классе, придумала и сделала деревоизмерительный прибор из длинной линейки и двух угольников, скреплённых резинками (рисунок справа).

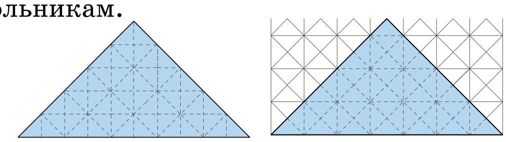


**3.** В дереве специальным инструментом высверливают дырку до середины ствола шириной в 1 – 2 см и аккуратно вынимают древесину, которая была на этом месте. По ней и считают годовые кольца. Биологи говорят, что дереву это неопасно и даже не больно – бо́льшая часть его древесины состоит из мёртвых клеток.

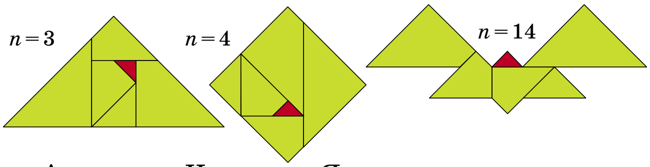
**4.** Осенью дерево сухое и лёгкое: готовясь к зиме, «выгоняет» воду в землю, чтобы та не замёрзла и не разорвала древесину в холод. А весной в дереве активно идёт обмен веществ, соки переносят минеральные вещества из почвы наверх, и древесина вся пропитана ими. Она тяжёлая, «вязкая», и пилить её труднее.

## МЕДВЕЖИЙ УГОЛ – 2 («Квантик» № 4, 2020)

«Парадокс» основан на том, что коробочка по площади равна 50 красным треугольникам (слева), а остальные элементы в сумме – 49 треугольникам.



Решения задач 1, 2, 3:




Александр Чиряев из Якутска первым из наших читателей построил ещё один симметричный 14-угольник, опровергнув утверждение автора о единственности решения, и собрал различные симметричные многоугольники, расширив возможности головоломки. Благодарим Александра Константиновича за активность и высылаем ему подарок – набор механических головоломок, опубликованных в «Квантике».

Приведём ещё несколько ответов, остальные найдите самостоятельно.

$n=8$ $n=9$ $n=10$ $n=14$

## НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА («Квантик» № 4, 2020)

Все числа в стихотворении приведены в двоичной системе счисления: например, 10 обозначает двойку, 100 – четвёрку.

## ПАРАДОКС СРЕДНЕЙ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ («Квантик» № 4, 2020)

Пусть бегуны потратили $a$, $b$, ..., $z$ секунд, тогда их средние скорости – $10/a$, $10/b$, ..., $10/z$ км/с, а их средняя скорость в среднем – это $\frac{\frac{10}{a}+\frac{10}{b}+\dots+\frac{10}{z}}{n}$, где $n$ – количество бегунов. Поделим расстояние 10 на среднюю скорость в среднем, получим $\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{z}}$ – это *среднее гармоническое чисел* $a$, $b$, ..., $z$.

Среднее время – это $\frac{a+b+\dots+z}{n}$, *среднее арифметическое чисел* $a$, $b$, ..., $z$. Формулы получились разными, так что парадокса нет.

На самом деле среднее арифметическое всегда больше среднего гармонического, кроме случая, когда все числа совпадают.

Если бегунов было всего двое, а на забег они потратили 4000 с и 5000 с соответственно, то их среднее арифметическое равно 4500 с, а среднее гармоническое равно 4444 с, как в условии.

«Правильно» ведёт себя при взятии среднего *темп* – отношение затраченного времени к пройденному расстоянию. Убедитесь, что средний темп в среднем всегда равен отношению среднего времени к расстоянию.

## XLI ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

### Базовый вариант

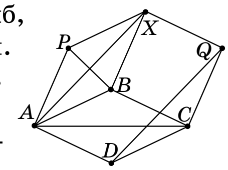
**1. Ответ:** да. Один из примеров см. на рисунке (пустые клетки – королевства, а цифра в клетке обозначает, сколько королевств претендует на эту спорную территорию).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | | | |
| 1 | 3 | | | 8 | |
| | 5 | 6 | | | |
| | | | | | |
| | | | 7 | | |
| | | 4 | | | |

**2. Ответ:** 22 числа. *Оценка.* Пусть нашлись 23 различных числа так, что сумма каждых 11 подряд идущих равна $A$ или $B$. Если сумма первых 11 равна $A$, то вторая сумма (со 2-го по 12-е число) равна $B$ (иначе 1-е и 12-е числа совпадут), третья сумма – снова $A$, четвёртая – $B$ и т.д. А значит, 1-е число отличается от 12-го на 1, а 12-е от 23-го – тоже на 1, но в другую сторону. Тогда 1-е и 23-е числа равны – противоречие.

*Пример*: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, −35, 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, −34.

**3.** Построим ромб $APXB$. Тогда четырёхугольник $CBXQ$ – тоже ромб, а $ADQX$ – параллелограмм. Поэтому $PB \perp AX \parallel DQ$, то есть прямая $PB$ содержит высоту треугольника $DPQ$. То же верно и для $QB$, что и требовалось.




**4.** Решение следует из тождества $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)$.

**5. Ответ:** Вася. Изначально фишки стоят на диагонали из a1 в h8, не соседствуя. Петя сбегает с неё, а Вася пусть возвращает эту фишку на диагональ, сохранив указанную ситуацию, если может. Вася не сможет это сделать, лишь если фишки окажутся в одной или соседних линиях. Тогда Вася делает такой ход, чтобы фишки образовали доминошку. После этого Вася будет сохранять доминошку, повторяя ход Пети другой фишкой. В итоге Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию, после чего Вася сдвинет эту фишку в h8 и победит.

**Сложный вариант**

**1. Ответ:** да. Поскольку $2020 = 20 \cdot 101$, то число 1019898767654543232 0 подходит.

**2. Ответ:** да. Если число голов чётно, богатыри могут уменьшить его, сохранив чётность. Действительно, если голов $4n-2$, то после удара Ильи их станет $2n-2$. Если же голов $4n$, то после удара Алёши их станет $3n-3$, а после следующего за ним удара Добрыни их станет $2n-4$.

Богатыри могут так действовать, пока не останется 4 или 2 головы, для которых хватит одного удара Алёши или Ильи соответственно.

**3. а) Ответ:** нет. Пусть такой 19-угольник существует. Рассмотрим вписанные углы, опирающиеся на его последовательные стороны. Все они разные, и сумма каждых двух углов, соответствующих соседним сторонам, целая (она дополняет один из углов 19-угольника до 180°). Рассмотрим два случая.

1) Все эти вписанные углы выражаются целым числом градусов. Тогда их сумма не меньше $1° + 2° + \ldots + 19° > 180°$, что невозможно.

2) Есть угол с ненулевой дробной частью $\varepsilon$. Тогда у соседнего угла дробная часть равна $1-\varepsilon$, у следующего – снова $\varepsilon$ и т.д. Поскольку 19 – нечётное число, то $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Но тогда сумма углов, опирающихся на все стороны, не меньше чем $\left(\frac{1}{2}^{\circ} + 1\frac{1}{2}^{\circ} + 2\frac{1}{2}^{\circ} + \ldots + 18\frac{1}{2}^{\circ}\right) = \frac{1}{2}(1° + 3° + 5° + \ldots + 37°) = \frac{1}{2} \cdot 361° > 180°$. Снова противоречие.

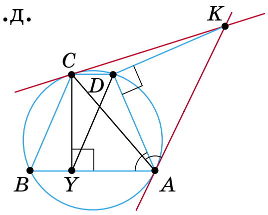
**б) Ответ:** да. Пусть вписанные углы, опирающиеся на последовательные стороны 20-угольника, равны $4\frac{1}{3}^{\circ}$, $4\frac{2}{3}^{\circ}$, $5\frac{1}{3}^{\circ}$, $5\frac{2}{3}^{\circ}$, …, $13\frac{1}{3}^{\circ}$, $13\frac{2}{3}^{\circ}$. Сумма этих чисел равна $2(4° + 5° + \ldots + 13°) + 10° = 180°$. Каждый угол 20-угольника равен 180° минус сумма двух соседних из указанного списка углов, а все эти суммы целые.

**4. Ответ:** для всех $N > 1$. Мы приводим примеры для $N = 4$ и $N = 5$. Аналогично строятся примеры для всех чётных (нечётных) $N$: в первом столбце реализуются все суммы от 1 до $N-1$, на стыке первого и второго столбцов – от $N$ до $2N-1$, во втором столбце – от $2N$ до $2N-2$ и т.д.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 7 | 11 |
| 1 | 4 | 8 | 11 |
| 1 | 5 | 8 | 12 |
| 2 | 5 | 9 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 9 | 14 | 18 |
| 1 | 5 | 10 | 14 | 19 |
| 1 | 6 | 10 | 15 | 19 |
| 2 | 6 | 11 | 15 | 20 |
| 2 | 7 | 11 | 16 | 20 |

**5.** Проведём высоту $CY$. Треугольники $ADY$ и $AKC$ равнобедренные и подобны (угол $KAC$, как угол между касательной и хордой, равен углу $DAY$, опирающемуся на такую же дугу). Тогда подобны и треугольники $ADK$ и $AYC$ (аналогично, равны углы $KAD$ и $CAY$, а $KA : AC = DA : AY$ в силу первого подобия). Следовательно, $\angle ADK = 90°$.




**6. Ответ:** 15 очков. Если Петя возьмёт себе все черви, все тузы, короли и дамы, то Вася не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, то есть наберёт не больше $36/2 - 3 = 15$ очков.

Переформулируем задачу. Рассмотрим доску $4 \times 9$. Петя закрашивает чёрным 18 клеток. Докажем, что Вася сможет выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце.

Пусть *вес* столбца – число чёрных клеток в нём. Сначала Вася разбивает каждый столбец веса 2 на две хорошие пары и вычёркивает его.

С точностью до симметрии будем считать, что столбцов веса 0 не больше, чем веса 4. Тогда для каждого столбца веса 0 Вася выберет парный столбец веса 4. Такие пары столбцов разбиваются на четвёрки хороших пар и вычёркиваются.

Поскольку чёрных и белых клеток поровну, столбцов веса 3 не больше, чем веса 1. Каждому столбцу веса 3 сопоставляем парный веса 1 и разбиваем на 4 хорошие пары, как на рисунках.

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 | 4 |

Итак, остались столбцы веса 4 и 1. Пока есть столбец веса 4, Вася сможет найти два столбца веса 1 и выделить из такой тройки столбцов хотя бы пять хороших пар клеток (см. рисунки).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 |
| 2 | 2 | |
| 3 | 5 | 3 |
| | 5 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 2 | 2 | 5 |
| 3 | 3 | 5 |
| 4 | | 4 |

Когда же столбцы веса 4 закончатся, столбцов веса 1 тоже не останется. Таких троек столбцов будет не более 3, ведь всего столбцов 9. Значит, мы разобьём на хорошие пары все клетки, кроме не более чем $3 \times 2 = 6$ клеток.