Константин Кохась

ЧЬЯ ПЛОЩАДЬ БОЛЬШЕ

Бусенька и её друзья – мышь Огрыза, уж Ушася и таракан Кузька – праздновали день рождения дятла Спятла. Имениннику подарили торт с шоколадными слониками. Праздник был в самом разгаре, как вдруг…

– Спасайся, кто может! – закричал дятел Спятел и выпрыгнул в окно.

Гости бросились врассыпную. Огрыза нырнула в подвал, Кузька исчез за шкафом, а Бусенька, схватив Ушасю за что попалось (а попался, естественно, хвост), запрыгнула в сейф дятла Спятла, выкинув из него статуэтку Хрустального Питона. Комната начала заполняться блестящими кольцами питона Уккха.

– Где же именинникххх? – поинтересовался Уккх. – И куда пропали госсссти? – продолжал он, осматриваясь, постоянно высовывая длинный раздвоенный язык – принюхиваясь. – А, вот вы куда залезли, – сказал он, заметив сейф.

– Вылезайте, – строго сказал Уккх и сквозь замочную скважину посмотрел на Ушасю так, что тому захотелось всё бросить и запрыгать, поползти, протиснуться, полететь и броситься прямо Уккху в пасть. К счастью, Бусенька крепко держала дверь.

– Не вылезем! – сказала она. – Дверь закрыта, а площадь сечения замочной скважины – 3 см^2 – слишком мала, чтобы мы через неё пролезли.

Уккх проглотил огромный кусок торта («Мммм… какие вкусные слоники!»), отправил в пасть миску витаминного салата из огурцов с остроухом и задумался. Взгляд его немного подобрел.

– У замочной скважины сложная форма, – наконец сказал он. – Как ты подсчитала её площадь?

– Съешь вон ту банку варенья, – сказала Бусенька, не отпуская дверцу, – а после этого поговорим!

Уккх схватил кончиком хвоста банку варенья и послушно проглотил её содержимое. Поморщившись и поискав взглядом по сторонам, он кинул в пасть нераспечатанную упаковку печенья. Бусенька выждала 20 секунд и приоткрыла дверцу сейфа.

– Печёные яблоки явно удались! – посоветовала она, показав на блюдо с яблоками. Уккх тут же надкусил одно яблоко и одобрительно кивнул.

– Как я подсчитала площадь? Да как обычно. Что такое площадь фигуры? Это такое число. Во-первых, оно неотрицательно. Во-вторых, площадь совсем простой фигуры, например прямоугольника, равна произведению длин его сторон. В-третьих, если маленькая фигура содержится в большой, то площадь маленькой фигуры не может быть больше площади большой фигуры. И наконец, в-четвёртых, если фигуру разрезать по прямой на две части, площадь фигуры будет равна сумме площадей частей.

– А если резать не по прямой? – с подозрением спросил Ушася.

– Всё зависит от того, как ты понимаешь слово «резать».

– Какое непростое определение, – сказал Уккх, – и как же найти площадь сложной фигуры, такой как сечение замочной скважины?

– И вообще, у любой ли фигуры существует площадь? – усомнился Ушася.

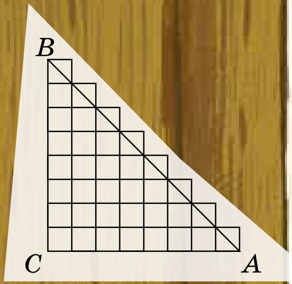
– У любой! – стала объяснять Бусенька. – Накроем несколькими квадратами, причём будем использовать только квадраты с вертикальными и горизонтальными сторонами. Подсчитаем сумму их площадей. Потом покроем фигуру квадратиками помельче, чтобы они лучше прилегали к её границам. Снова подсчитаем сумму площадей. Каждое такое вычисление даёт нам слегка завышенное значение площади фигуры. Чем больше таких экспериментов мы проведём, тем точнее нам будет известна площадь фигуры.

– Неужели этот громоздкий рецепт действительно позволяет вычислить площадь хоть какой-нибудь фигуры? – спросил Уккх.

– Конечно, позволяет! Вот, например, разрежем единичный квадрат по диагонали на два прямоугольных треугольника. Найдите по этому рецепту площадь одного такого треугольника.

– Ну… если это не очень сложно…

– Не сложно, – воодушевился Ушася. – Нарисуем наш треугольник ABC на листе в клетку. Пусть длина стороны клетки равна $\frac{1}{n}$. Тогда вдоль стороны помещается ряд из n клеток (на рисунке оказалось $n=8$). А весь треугольник покрывается ступенчатой фигу-



рой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду – две, в третьем – три и т.д., вплоть до последнего ряда, где n клеток. Всего, значит, имеется

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

клеток. Площадь одной клеточки равна $\frac{1}{n^2}$, значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Чем больше мы возьмём число n, тем меньше будут сторона клеточки $\frac{1}{n}$ и слагаемое $\frac{1}{2n}$ в подсчитанной нами сумме и тем ближе будет эта величина к $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}$.

– И для замочной скважины вычисления аналогичны, – подтвердила Бусенька. – Только там формулы похитрее. Но у меня геометрический сопроцессор, мне такие штуки легко даются.

– Всё ясно, – сказал Уккх. – А правильно ли я понял, что необязательно брать квадратики одинакового размера? Некоторые могут быть совсем крупными, а некоторые совсем маленькими.

– Зачем так усложнять? – возразил Ушася. – Сначала берёшь крупную сетку, потом помельче, потом – совсем миллиметровку... Главное, каждый раз учитывать только те квадратики, которые задевают фигуру. Очень практичный способ получается!

– Нет-нет, – не согласилась Бусенька, – клеточки могут быть разными, причём не только квадратными, но и прямоугольными. Они могут пересекаться, и вообще, их может быть бесконечно много!

– Как это бесконечно много? Мы же считаем площадь ограниченной фигуры!

– Ну да, фигура ограниченная, скажем, помещается на одном листе бумаги, но, накрывая фигуру, мы можем брать квадратики всё меньшего и меньшего размера – так, что в результате их общее количество будет бесконечным!

– Я понял, – сказал Уккх. – Например, предыдущий треугольник можно накрыть такими вот уменьшающимися клеточками. Тут вообще все клеточки умещаются внутри фигуры. Правда... если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны AB. Зато клеточек получается бесконечно много!

– Только не надо думать, что прямоугольники должны умещаться внутри фигуры, – предупредила Бусенька, – они могут вылезать за её пределы – так же, как это было в вычислении Ушаси.

– Мой подход к вычислению площади значительно проще и удобнее, чем у Уккха! – заявил Ушася.

– А мой – более гибкий! – возразил Уккх.

– Не спорьте, – вмешалась Бусенька, – давайте я попрошу вас вычислить площадь какой-нибудь хитрой фигуры, у кого лучше получится – тот и прав!

– Разве таким способом принято решать математические споры? – усомнился Ушася.

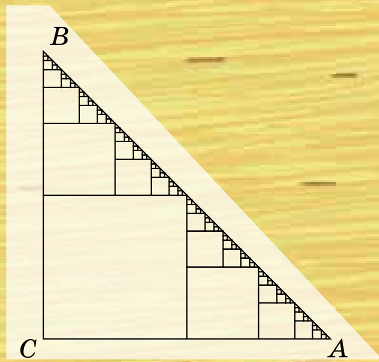
– Давай нам свою хитрую фигуру, – энергично потребовал Уккх и облизнулся.

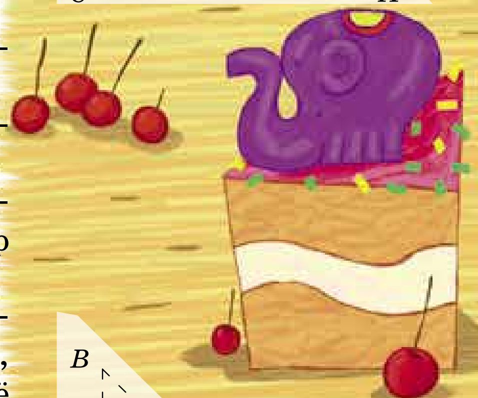
– Хорошо. Но сначала скажите-ка мне для разминки, чему равна площадь одной точки, например точки A из нашего предыдущего треугольника?

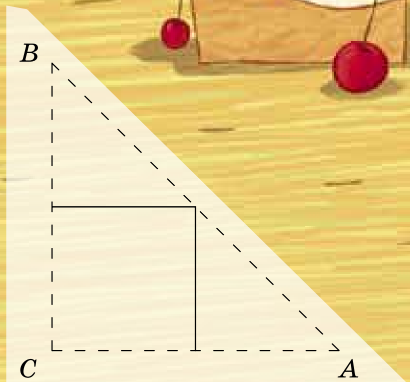
– Нулю, – тут же сказал Уккх, – мы можем накрыть точку квадратиком со стороной 1, значит, площадь точки меньше 1. Но мы можем накрыть её и квадратиком со стороной $\frac{1}{10}$, тогда получится, что площадь точки меньше $\frac{1}{100}$. И точно так же окажется, что площадь точки меньше любого другого положительного числа. Значит, площадь равна нулю.

– Ладно, вот тогда вам хитрая фигура! Возьмём всё тот же треугольник ABC. И нарисуем внутри него линии первой сетки – той, где размер клеточек был равен $\frac{1}{2}$. Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки – со стороной $\frac{1}{3}$. Кстати, а чему равна площадь «лесенки», составленной из этих линий?

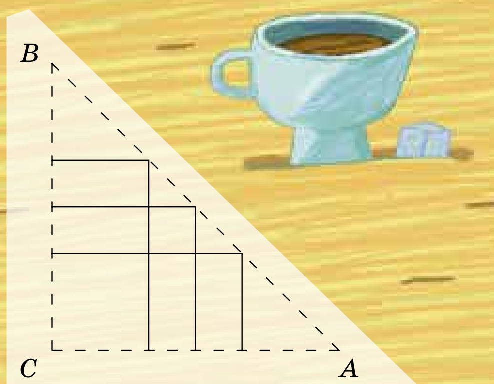
– Тоже нулю, – выпалил Ушася. – На очень мелкой миллиметровке каждый отрезок можно накрыть прямоугольником, состоящим из одного ряда клеток. Ширина такого прямоугольника равна стороне одной клетки, поэтому его площадь очень мала. Всего у нас будет шес-с-с-ть таких прямоугольников, их суммарная площадь тоже очень мала. Какое положительное число ни возьми, эту лесенку можно накрыть прямоугольниками, у которых сумма площадей будет мень-



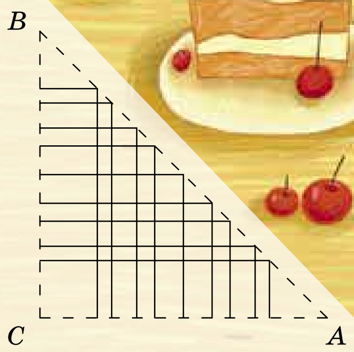




Нарисуем сетку со стороной $\frac{1}{2}$



Добавим сетку со стороной $\frac{1}{3}$. Получилась «лесенка»



Потом добавим сетки со стороной $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ ...

ше этого числа. Значит, площадь лесенки равна нулю.

– Верно! – согласилась Бусенька. – Но я ещё не дорисовала хитрую фигуру. Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Теперь нарисуем линии следующей сетки – со стороной $\frac{1}{4}$, потом со стороной $\frac{1}{5}$ – и так далее (до бесконечности). Моя хитрая фигура – это объединение всех-всех этих линий. Спрашивается, чему равна её площадь?

– Одной второй, – немного подумав, сказал Ушася.

– Нулю, – почти сразу же с ним произнес Уккх.

– А как вы посчитали?

– Возьмём совершенно любую квадратную сетку, – стал объяснять Ушася, – к примеру, со стороной квадрата $\frac{1}{100}$. Посмотрим только на квадратики, накрывающие треугольник. Мы должны выбрать из них набор квадратиков, накрывающих хитрую фигуру. Но фигура действительно ужасно хитрая: она ведь содержит все линии более мелкой сетки со стороной $\frac{1}{200}$, а они рассекают каждый квадратик сетки со стороной $\frac{1}{100}$. Получается, что для того, чтобы накрыть фигуру, нам придётся взять все квадратики, накрывающие треугольник *ABC*! Значит, любое измерение площади фигуры «по клеточкам» даёт такой же результат, как для треугольника *ABC*. Поэтому площадь фигуры равна площади треугольника!

– Хм, вроде всё правильно. А ты как посчитал? – спросила Бусенька Уккха.

– Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, – уверенно сказал Уккх. – Вот, например, как построить набор прямоугольников, чтобы их суммарная площадь была равна $\frac{1}{1000}$? Начнём рисовать первую сетку (со стороной $\frac{1}{2}$). Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{2}$. Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{4}$. Потом нарисуем третий отрезок. Ой, нет, в первой сетке больше нет отрезков, значит, переходим к рисованию отрезков второй сетки.

Рисуем отрезок второй сетки и накрываем его прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{8}$. И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямоугольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего прямоугольника. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $\frac{1}{1000}$, а мог бы вместо $\frac{1}{1000}$ взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

– Выглядит убедительно, – согласилась Бусенька.

– Моя площадь больше – значит, я выиграл! – закричал Ушася.

– А тогда я тебя съем! – злобно ответил Уккх.

Но Бусенька была начеку. Схватив Ушасю за что попало (да-да, опять за хвост, вы правильно догадались), она прыгнула в сейф. Уккх посмотрел на захлопнувшуюся дверцу и на Хрустального Питона, валявшегося на полу, и грустно облизнулся.

– Здорово я его обыграл? – спросил Ушася Бусеньку, когда они надежно заперлись в сейфе.

– Здорово, – сказала Бусенька. – Но ты заметил, что площадь у тебя странная? Площадь хитрой фигуры равна $\frac{1}{2}$, и точно так же проверяется, что площадь остальной части треугольника тоже равна $\frac{1}{2}$. Получается, что мы разбили треугольник площади $\frac{1}{2}$ на две части, и у обеих частей площадь равна $\frac{1}{2}$!

– Действительно, странно… Хотя… Это не противоречит твоему определению площади! Ты же говорила, что площадь фигуры равна сумме площадей кусочков, когда мы режем фигуру по прямой. А здесь нет ничего похожего на разрезание по прямой. Твою хитрую фигуру вообще невозможно вырезать из треугольника! А что, у Уккха площадь не странная?

– Тоже странная. Но в этом можно убедиться с помощью уж совсем хитрых фигур.

– Ну, значит, я действительно его победил!

Художник Инга Коржнева