СлоВА на ленте

Виктор Клепцын

Окончание. Начало в № 5

Напомним, что Квантик, Женя и Мика изучают бесконечное слово Фибоначчи *ABAABABAABAAB*..., которое получается из буквы *A* чередой замен, когда каждая буква *A* заменяется на *AB*, а каждая буква *B* на *A*. Возникающие после замен слова *A*, *AB*, *ABA*, *ABAAB*,... продолжают друг друга и все являются начальными участками слова Фибоначчи.

Тут Мика посмотрел на выписанное начало слова Фибоначчи и задумался:

– Интересно: на вид кажется, что буквы *A* и *B* в нём «размешаны» очень равномерно, причём букв *A* больше. А во сколько раз?

– Мы уже знаем, что количества букв *A* и *B* в каждом очередном начальном слове будут последовательными числами Фибоначчи, – отреагировала Женя. – Поэтому их отношение – это отношение двух последовательных чисел Фибоначчи.

– А такие отношения становятся с ростом номера всё ближе к известному ещё древним грекам *золотому сечению* φ, – продолжил Квантик. – Не хотите попробовать угадать, чему оно должно быть равно?

– Пусть у нас есть какое-то слово, которое мы подаём на вход машине. Тогда в следующем слове букв *B* будет столько, сколько сейчас *A*, а букв *A* столько, сколько букв *A* и *B* вместе взятых. Если отношение почти не меняется, то должно быть такое правило: «букв *A* (примерно) во столько же раз больше, чем букв *B*, во сколько раз всех букв больше, чем букв *A*».

– Правильно; а ещё можно в таком отношении поделить отрезок – тогда *отношение большей части к меньшей будет таким же, как всего отрезка к большей части*; так золотое сечение и определяли древние греки. Кстати, в таком отношении диагональ правильного пятиугольника делит другую диагональ в точке их пересечения. (А ещё об этом можно почитать в прошлых номерах «Квантика»[1] и «Кванта»[2].)

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– Ещё не очень сложно написать, какому уравнению золотое сечение φ удовлетворяет. Напишете?

– Если меньшую часть отрезка (или количество

[1] Александра Подгайц. Интересные факты о золотом сечении. «Квантик» №6, 2013.

[2] А. Спивак. Числа Фибоначчи. «Квант» №2, 2003.

букв B) принять за единицу, то бо́льшая часть отрезка (количество букв A) будет равна φ, а весь отрезок (или всё слово) будет ещё в φ раз больше и будет равняться φ^2. Но отрезок есть сумма своих частей (а слово состоит из букв A и B) – и получается, что $\varphi^2 = \varphi + 1$. Только как отсюда φ найти?

– Всё верно, – подтвердил Квантик. – Это квадратное уравнение, и вы ещё не умеете его решать. Но если я скажу ответ, то его не очень сложно подставить и проверить. А ответом будет $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Кстати, это число *иррациональное*; нельзя ли это к чему-нибудь применить?

– Мы собирались после разобраться, почему слово Фибоначчи не периодичное. Может быть, сюда? – догадалась Женя. – Если бы слово Фибоначчи было периодичным, оно состояло бы из повторений своего периода. И тогда число израсходованных букв A и B становилось бы всё ближе к их отношению за период. И это было бы рациональное число. А корень из 5 – и золотое сечение – числа иррациональные, их нельзя записать как отношение двух целых чисел! Вот поэтому слово Фибоначчи и не может быть периодичным.

Мика присмотрелся к красно-синим треугольникам на рисунке 2 прошлого номера и начал их считать.

– Так, – сказал он, – в треугольнике, который мы получили за две замены, 3 синих треугольника и 5 красных. В том, что получили за три замены, – 8 синих и 13 красных. Это же опять числа Фибоначчи!

– И если это так, а это наверняка так, – подхватила Женя, – то красных треугольников в большом-большом треугольнике опять примерно в φ раз больше, чем синих. И поэтому то же рассуждение утверждает, что и мозаика на плоскости не может быть периодичной!

– Молодцы, вы абсолютно правы, – подтвердил Квантик. – Ещё можно было бы сказать, что не бывает мозаик, одновременно периодических и сохраняющихся при повороте на 1/10 оборота, но это уже другая история.

– Интересно, – опять задумался Мика. – Вот мы знаем, сколько в начальной части слова Фибоначчи букв A и B, если длина этого начала – число Фибоначчи. А сколько каких букв попадут в первые сто? Или

в первую тысячу? Ведь ни 100, ни 1000 не будут числами Фибоначчи.

– Давай посмотрим! – предложил Квантик. – Возьмём листочек в клеточку и для каждого начального участка отметим, сколько там букв A (их мы отложим по горизонтали), а сколько B (их мы отложим по вертикали). И ещё раскрасим точку с этими координатами тем же цветом, что и последняя буква участка.

Женя взялась за работу, и через какое-то время точки заняли свои места: у неё получилась картинка как на рисунке 4, слева.

– Ух ты, все точки попали в очень узкую полоску, – удивилась Женя. – То есть отношение количеств букв всегда очень-очень близко к золотому сечению!

– Именно так, – подтвердил Квантик.

– А ещё, – подхватил Мика, – кажется, в этой полосе все синие точки ближе к верхнему краю, а красные – к нижнему. Только это уже на глаз не очень надёжно проверять...

– И это правда, – поддержал его Квантик. – Давайте аккуратно спроецируем их все на перпендикуляр к оси этой полосы; смотрите, что получается!

Квантик добавил все проекции (на этот раз воспользовавшись компьютером, чтобы обеспечить нужную точность) – и оказалось, что проекции синих точек «заметают» один отрезок, а проекции красных – другой (рис. 4, справа).

– Забавно. А что будет, если брать другие правила замены? – поинтересовалась Женя.

– Вообще может получиться довольно много разного. Но самое красивое получается, если перестроить машину так, чтобы слова состояли уже из трёх букв, A, B и C, а машина обрабатывала бы их по правилам $A \to AB$, $B \to AC$, $C \to A$.

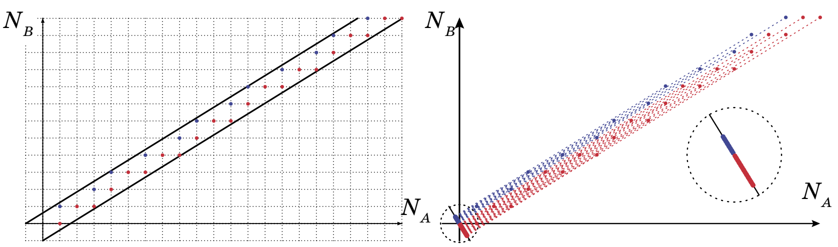

Рис. 4. Количество букв A и B среди первых n букв слова Фибоначчи

– Тогда, – продолжил Квантик, – начав с буквы *A* и применяя новую машину снова и снова, можно получить новое бесконечное слово. Его в шутку называют *словом Трибоначчи*, хотя математика Трибоначчи, конечно, никогда не существовало:

A
AB
ABAC
ABACABA
ABACABAABAC
ABACABAABACABABACABAABACABAC
....

– Интересно! – отреагировал Мика. – А тут в каком соотношении разделятся используемые буквы?

– Тут тоже отношения количеств букв *A* к *B* и *B* к *C* становятся всё ближе и ближе к некоторому числу $x = 1{,}839...$, которое уже задаётся *кубическим* уравнением $x^3 = x^2 + x + 1$. А если отложить количества этих букв по трём осям, то получится красивая пространственная «змейка», ползущая в одном конкретном направлении. И, как и раньше, от этого направления она не сильно уклоняется.

Квантик нажал на несколько кнопок – и на экране появилась картинка как на рисунке 5, слева.

– Но самое интересное будет, если раскрашенные в три цвета (по последней букве слова) точки спроецировать на правильно выбранную плоскость.

Тут Квантик нажал ещё несколько кнопок, и на экране возникла проекция: сначала она состояла из отдельных точек, а потом их стало настолько много, что они слились в фигуры (рис. 5, в центре и справа). А Квантик продолжил объяснять:

– Если для слова Фибоначчи мы видели два отрезка, то тут вся проекция разрезается на три непересе-

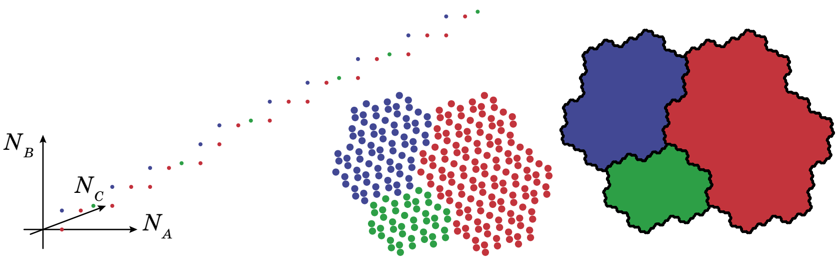

Рис. 5. Количество букв *A*, *B* и *C* среди первых *n* букв слова Трибоначчи и появление фрактала Рози

кающиеся части. И оказывается, все они, и фигура целиком, и каждая из частей, *подобны* друг другу, причём с поворотом! А площади у частей относятся именно как $1 : x : x^2$. Эта замечательная фигура называется *фракталом Рози́*.

Кстати, бо́льшую из частей можно опять подразбить на три, подобные ей. А потом подразбить и бо́льшие из имеющихся частей, и повторить это несколько раз. Если потом увеличить самую большую из оставшихся частей до исходного размера, получается разбиение всё большей и большей области на плоскости – а в пределе и (непериодичное!) разбиение всей плоскости. Кстати, фрактал Рози возникает и в совсем современных математических статьях (рис. 6).

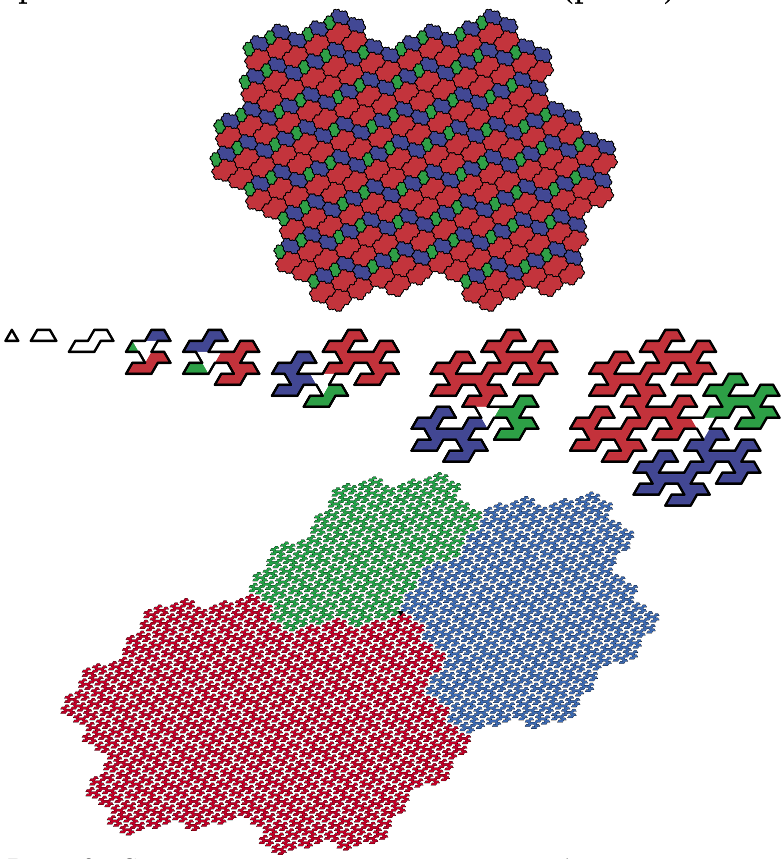

Рис. 6. Сверху – квазипериодичное разбиение плоскости, снизу – появление фрактала Рози в статье W. P. Hooper, B. Weiss «Rel leaves of the Arnoux–Yoccoz surfaces» (Selecta Mathematica, 2018)

P.S. Автор благодарит О. Ромаскевич, Г. Мерзона и А. П. Веселова, без них этой статьи бы не было. Интересные материалы о «хорошо перемешанных» последовательностях букв, подстановочных словах, фрактале Рози см. по ссылке **kvan.tk/fib-lit**

Художник Мария Усеинова