Александр Блинков

РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Как разбить треугольник на подобные ему треугольники?[1] Сколько треугольников можно получить при таких разбиениях?

Разбиения равностороннего треугольника на равносторонние: от 4 до бесконечности

Очень легко разбить любой равносторонний треугольник на 4 равных равносторонних треугольника, соединив отрезками середины его сторон, то есть проведя средние линии (рис. 1, *а*).

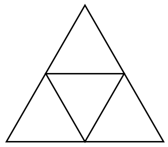
Рис. 1, *а*

Продолжая разбивать этим же способом получающиеся части, мы сможем разделить исходный треугольник на 7, 10, 13, ... равносторонних треугольников, и вообще, на любое их число вида $3k+1$ (где k – натуральное). Отметим, что среди треугольников разбиения обязательно будут равные.

Аналогично строится одна из самоподобных фигур – ***треугольник Серпинского*** (такие фигуры называются ***фракталами***). В равностороннем треугольнике проводятся средние линии и «вынимается» средний из четырёх получившихся треугольников. Этот процесс повторяется в каждом из трёх остальных треугольников и т. д., до бесконечности. Итоговая фигура (рис. 1, *б*) имеет ту же форму, что и её части.


Рис. 1, *б*

А если делить стороны равностороннего треугольника не на 2 равные части, а на 3, 4 и т. д.? Тогда можно разбить его на 9, 16, ... равных равносторонних треугольников (рис. 2, *а*, *б*). Ведь если поделить одну из сторон на n равных частей, то сторона маленького треугольника будет в n раз меньше стороны исходного, а площадь тогда – в n^2 раз меньше. Это и значит, что в разбиении будет n^2 треугольников. Кстати, их можно было подсчитать

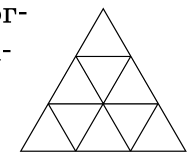
Рис. 2, *а*

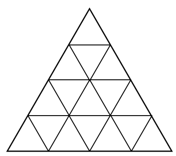
Рис. 2, *б*

[1] Два треугольника подобны, если углы одного соответственно равны углам другого (достаточно соответствующего равенства двух углов).

и по «слоям»: в верхнем слое – один треугольник, в следующем – 3, в последующем – 5, ..., в самом нижнем слое будет $2n-1$ треугольников. Попутно мы доказали геометрически, что $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Обобщаем на произвольные треугольники

Всё сказанное выше легко обобщить на случай произвольного треугольника, проводя три семейства параллельных прямых (в каждом семействе прямые параллельны одной стороне и делят каждую из двух других сторон на n равных частей). Теперь несложно понять, как разбить любой треугольник на n ему подобных, где $n>5$. Разбиение на 6 треугольников, подобных исходному, получается, если сделать чертёж, аналогичный рисунку 2, *а*, и стереть лишние линии (рис. 3, *а*). Разбиение на 8 подобных (рис. 3, *б*) получается из рисунка 2, *б*, и т. д., для любых чётных n, больших 5. Если же n – нечётное, то после стирания надо сделать ещё один шаг: разбить «верхний» треугольник средними линиями на четыре равных. На рисунке 3, *в* показано такое разбиение на 11 треугольников.

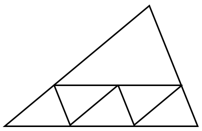
Рис. 3, *а*

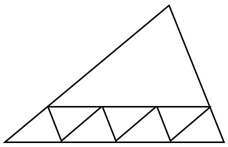
Рис. 3, *б*

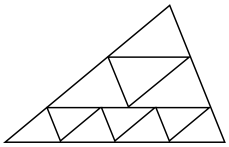
Рис. 3, *в*

А вот на 2, 3 или 5 треугольников, подобных исходному, можно разбить не любой треугольник.

Прямоугольные треугольники

Выясним, какой треугольник можно разбить на два ему подобных. Пусть отрезок CD делит треугольник ABC на два ему подобных: ACD и BCD. Если $\angle CAD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$, то $\angle BDC=\alpha+\beta$ (рис. 4, *а*). Тогда в треугольнике ACD должен быть угол $\alpha+\beta$, и это может быть только угол ADC. Значит, $\angle ADC=\angle BDC=\alpha+\beta=90^\circ$. Тогда исходный треугольник тоже прямоугольный, и $\angle ACB=90^\circ$.

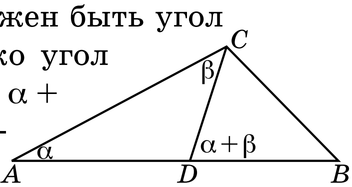

Рис. 4, *а*

Так как $\alpha+\beta=90^\circ$, то $\angle DCB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, и треугольники ACD и BCD подобны треугольнику ABC (рис. 4, *б*).

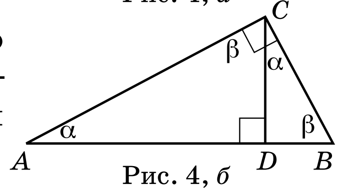

Рис. 4, *б*

Проведя в любом из полученных треугольников высоту из вершины D, мы разобьём треугольник ABC на три треугольника, ему подобных. Продолжая этот процесс, можно разбить прямоугольный треугольник на любое количество ему подобных. А можно ли сделать эти треугольники равными? Иногда можно.

Так, если прямоугольный треугольник ABC – ещё и равнобедренный, высота CD разбивает его на 2 равных прямоугольных равнобедренных треугольника, подобных ABC, а их высоты, проведённые из вершины D, дают уже 4. Продолжая, можно разбить прямоугольный равнобедренный треугольник на 2^n равных треугольников, подобных ему (n – любое натуральное).

Но этот случай – не единственный. Пусть длины катетов прямоугольного треугольника равны целым числам m и k, тогда его можно разбить на $m^2 + k^2$ равных треугольников, подобных ему. Для этого проведём высоту из вершины прямого угла и разобьём один получившийся треугольник на m^2, а другой – на k^2 равных треугольников, как на рисунке 2. Полученные маленькие прямоугольные треугольники двух видов равны (по гипотенузе и острому углу) и подобны исходному. На рисунке 5 – пример разбиения треугольника с катетами 5 и 7 на $74 = 5^2 + 7^2$ равных треугольника.

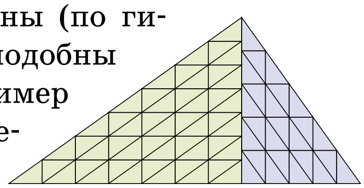

Рис. 5

Разбиения на различные подобные треугольники

А какой треугольник можно разбить на треугольники, ему подобные, среди которых не будет равных? Оказывается, любой неравносторонний. Перед тем как объяснить решение, напомним, что в подобных треугольниках равны отношения соответствующих сторон. Построить искомое разбиение поможет обобщённая теорема Фалеса: параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $BC/AC = k > 1$. Приложим к треугольнику ABC треугольники 1, 2, 3, 4 и 5 (рис. 6). Получим треугольник, разбитый на 6 неравных подобных треугольников.

Треугольники ABC, 1, 2, 3, 4 все различны, так как каждый следующий в k раз больше предыдущего.

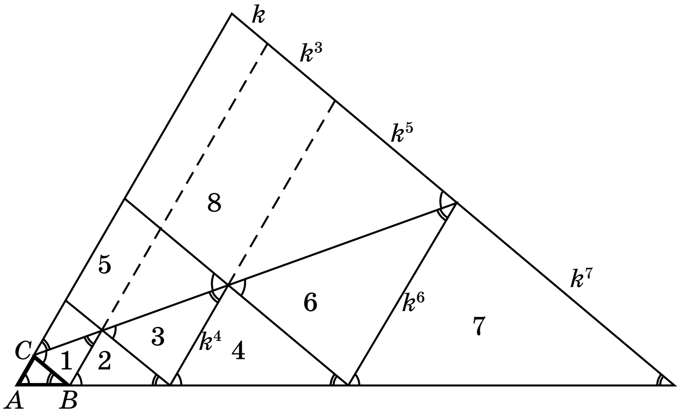

Рис. 6

Но треугольники 4 и 5 могут оказаться равными, если $k+k^3=k^4$. Тогда достроим треугольники 6 и 7, а треугольник 5 заменим треугольником 8. Треугольники 7 и 8 не равны, так как $k^6 \neq k+k^3+k^5$. Ведь если $k+k^3=k^4$, то $k^6=k^2(k+k^3)=k^3+k^5<k+k^3+k^5$.

Вместо заключения

Какие треугольники разрезаются на 5 подобных, до конца неизвестно, см. статью Б. Френкина «О разрезании треугольника на подобные ему» («Квант» № 4 за 2008 г.). Развитие темы для многоугольников см. в книге М. Гарднера «Математические досуги» (Мир, 2000; гл. 24: «Делящиеся» фигуры на плоскости).

Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли какой-нибудь треугольник разбить на три равных треугольника, подобных исходному?

2. Можно ли разбить на пять треугольников, подобных исходному, какой-нибудь: а) прямоугольный треугольник; б) (*С. Маркелов*) непрямоугольный треугольник?

3. (*Т. Емельянова*) Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все между собой равны.

4. (*А. Галочкин*) Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

5. (*Д. Шноль*) Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей первого подобна одной из частей второго. Обязательно ли подобны оставшиеся части?

6. (*М. Панов*) Можно ли равносторонний треугольник разбить на 5 равнобедренных, но попарно не подобных?

Художник Мария Усеинова