КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, II ТУР

(«Квантик» № 4, 2020)

6. *Найдите русский односложный предлог, который можно понять как деепричастие. Напишите начальную форму глагола, от которого образовано это деепричастие.*

Этот предлог – ***для***. Его можно понять как деепричастие *для* «продолжая», образованное от глагола ***длить***.

7. *В русской букве В две «дырочки». А сколько всего «дырочек» в буквах русского алфавита? (Под «буквами» в этой задаче понимаются заглавные печатные буквы.)*

Считаем: А – 1, Б – 1, В – 2, Д – 1, О – 1, Р – 1, Ф – 2, Ъ – 1, Ы – 1, Ь – 1, Ю – 1, Я – 1 (в заглавных Е и Ё дырочек нет). Итого **14 дырочек**.

8. а, б, в, ж, ... *Напишите два следующих элемента этого списка.*

В первый момент приведённый набор кажется странным: почему после *а*, *б* и *в* идёт именно *ж*? Подумав, мы понимаем, что перед нами – начало <u>упорядоченного по алфавиту списка однобуквенных слов русского языка.</u> Два следующих элемента этого списка – ***и*** и ***к***, а ещё он включает в себя буквы (они же слова) *о*, *с*, *у*, *э*, *я*.

9. *Решите шуточную задачу: с суффиксом -ник – любитель, без суффикса – профессионал.*

Слово «шуточная» в этой задаче – не характеристика жанра (задача как раз вполне серьёзная), а намёк на то, в какой области искать ответ. От того же корня, что и прилагательное *шуточный*, образованы существительные ***шутник*** «любитель пошутить» (с суффиксом *-ник*) и ***шут*** «человек, профессиональная обязанность которого – развлекать какое-либо высокопоставленное лицо» (без суффикса).

10. *Двухлетний Петя недавно узнал несколько новых слов. Произносит он их примерно так:* кук, ава́й, его́ни, апе́пе. *Все эти слова относятся к одной группе. Значения этих слов Петя знает хорошо и никогда не путает кук и авай, гегони и апепе. Как выглядят эти слова во «взрослом» языке?*

Петя узнал <u>названия четырёх геометрических фигур</u>: ***круг***, ***овал***, ***треугольник***, ***трапеция***. Если в столь юном возрасте Петя никогда не путает круг с овалом, а треугольник – с трапецией, он, безусловно, большой молодец.

ПАМЯТЬ СНОВА ПОДВЕЛА

(«Квантик» № 5, 2020)

Найдём все числа с этим свойством. Однозначные числа подходят, поищем ещё. Пусть x – самая большая цифра в числе среди тех, что стоят не на последнем месте. Если $x=1$, наше число двузначное, начинающееся с 1, но не 11.

Пусть $x>1$. Если за какой-то из цифр x следует y, то y – самая частая цифра, и перед каждым y стоит x, если только y не на первом месте. Верно и обратное, после каждой цифры x всегда стоит y. Ведь если бы следом за x встречались две разные цифры y и z (одна из них может совпасть с x), то вместе цифр y и z было бы $2x$, и цифр x было бы хотя бы $2x-1$. Но $2x-1>x$, и тогда y – не самая частая цифра, противоречие.

Итак, y может стоять первой в числе, но далее x и $\boldsymbol{y}$ идут всегда парами xy, и всего цифр x либо x (столько, сколько y), либо $x-1$.

Если цифр x всего x, то перед одной из цифр x будет стоять x, и тогда $x=y$. В этом случае число состоит из x цифр x. Максимальное такое число – 999999999.

Пусть теперь в числе всего $x-1$ цифр x. Поскольку цифр y всего x, имеем $y\neq x$. Так как x – максимально, то $y<x$ и число начинается на y. Тогда начало числа разбивается на $x-1$ блоков цифр «от y до следующего x»:

$$\boxed{y\ .....\ x}\ \boxed{y\ .....\ x}\ ...\ \boxed{y\ .....\ x}\ y\ ....$$

Заметим, что каждый блок однозначно восстанавливается справа налево. Значит, каждая цифра блока встречается в числе хотя бы $x-1$ раз. Тогда все цифры в блоке не меньше $x-1$, в частности и y. Итак, $y=x-1$, и блоки равны yx.

Значит, число начинается на $yxy...xy$, а дальше нет цифр x или y. Если за последним y идёт новая цифра z, то $y=1$, ведь иначе z повторится и перед ней снова будет y. Поэтому число либо равно $yxy...xy$, где $y=x-1$, либо равно 121?, где последняя цифра может быть любой, кроме 1 и 2. Наибольшее число получается при $x=9$.

НАШ КОНКУРС, IX тур (**«Квантик» № 5, 2020**)

41. *Перед игроком стоят в ряд 3 шкатулки, в одной из которых лежит приз. К шкатулкам прикреплены записки с утверждениями, как на рисунке. Известно, что ровно одно из утверждений истинно. Какую шкатулку нужно открыть, чтобы получить приз?*

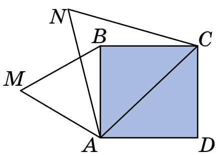
Здесь приза нет	Приз лежит здесь	Приз в соседней шкатулке

Ответ: правую. Если приз в левой шкатулке, то все утверждения ложны, если в средней – то все верны. А если приз в правой – верно только утверждение на левой шкатулке.

42. *Толя Втулкин отметил на прямой три точки и заметил, что всевозможных отрезков с концами в этих точках оказалось 3, а всевозможных лучей с началами в этих точках – 6, в два раза больше. «Интересно, – подумал Толя, – а можно ли отметить столько точек, чтобы получилось наоборот: число всевозможных лучей с началами в этих точках было бы в два раза меньше количества всевозможных отрезков с концами в этих точках?» Ответьте на вопрос Толи.*

Ответ: да. Отметим 9 точек. Тогда отрезков столько же, сколько пар точек: $9\cdot 8/2=36$, а лучей – удвоенное число точек: $9\cdot 2=18$.

43. *На диагонали и стороне единичного квадрата ABCD построены правильные треугольники AMB и ANC так, как показано на рисунке. Чему равно расстояние MN?*



Ответ: 1. Треугольник BAC при повороте на 60° против часовой стрелки вокруг вершины A переходит в треугольник MAN. Действительно, треугольники BAM и CAN правильные, поэтому стороны AB и AC переходят соответственно в AM и AN, а угол BAC – в угол MAN. Значит, треугольники BAC и MAN равны по первому признаку, и $BC=MN$.

44. *Число 1210 обладает таким свойством: каждая его цифра, кроме последней, показывает, сколько раз в нём встречается следующая цифра. А именно: «12» означает, что в числе одна двойка, «21» – что в нём две единицы, «10» – что в нём один ноль. Существует ли число с таким же свойством, большее миллиарда?*

Ответ: да, например, 89 898 989 898 989 898 (это число – максимально возможное, см. выше ответ к статье «Память снова подвела»).

45. *Можно ли записать в клетках фигуры F натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом горизонтальном прямоугольнике 1×3, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 10, а сумма чисел в любом вертикальном прямоугольнике 3×1, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 11, если фигура F – это*

а) квадрат 5×5; б) квадрат 5×5, у которого удалили центральную клетку?

а) Ответ: нельзя. Пусть числа записать удалось. Рассмотрим любой квадрат 3×3 внутри фигуры F. Его можно разрезать на три «горизонтальных» прямоугольника 1×3, а можно – на три «вертикальных». Тогда сумма чисел в клетках этого квадрата равна $3\times 10=30$ и она же равна $3\times 11=33$, что невозможно.

1	1	8	1	1
1	1	8	1	1
9	9		9	9
1	1	8	1	1
1	1	8	1	1

б) Ответ: можно, см. рисунок.

НОВЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ФЕЙЕРВЕРК
(«Квантик» № 6, 2020)

Белая мгла и снежная слепота. Белая мгла бывает разной. Когда низовая метель поднимает вверх пушистый снег, видимость может упасть настолько, что, отойдя на несколько метров, легко потеряться. В другом случае белая мгла случается, когда земля покрыта белым снегом, а небо затянуто сплошными белыми облаками. Поскольку и снег, и облака хорошо отражают свет, освещение становится настолько диффузным (иначе говоря, рассеянным), что исчезают тени. Когда снег под ногами столь же яркий, как и облака над головой, горизонт неразличим, а небо и снег сливаются в одну белую пелену. Тогда может возникнуть ощущение, что вас окружает бесконечная белая пустота. Рассказывая о полярной экспедиции, длившейся пять лет, Вильялмур Стефанссон вспоминал, что обычно белая мгла опускалась и не в ясные дни, и не когда на небе была сплошная плотная облачность. Скорее, такая угроза возникала в тех случаях, когда солнечный свет пробивался через прикрывающие небо облака. Вот тогда можно не заметить и ледяную глыбу высотой в половину человеческого роста, не говоря уже о льдинах меньшего размера, о которые легко споткнуться.

Яркий видимый свет и интенсивное ультрафиолетовое излучение могут вызвать боль в глазах и даже привести к слепоте. До сих пор, чтобы уменьшить воздействие света на глаза, коренные жители Канады и Аляски защищают глаза маской из дерева или кости с узкими прорезями для глаз.

Одностороннее зеркало. Ответ см. в этом номере журнала на с. 2–5.

Бар в «Фоли-Бержер». Формы отражённых в зеркале изображений правильные, но расположены изображения неправильно. Это чувствуется уже при первом взгляде на картину, ещё до того, как понимаешь, в чём дело. Настоящие бутылки слева на картине стоят ближе к барменше, а на отражении они на дальнем от неё краю стойки. Отражение девушки должно быть позади неё, а не сдвинуто, причём достаточно далеко, вправо. И самое странное: девушка смотрит прямо на вас, но в зеркале вы видите стоящего перед ней мужчину. Выходит, что именно вы и есть тот мужчина. Но тогда ваше отражение не должно быть сдвинуто ещё дальше вправо, как это нарисовано на картине. На самом деле фигура девушки заслонила бы от вас ваше отражение.

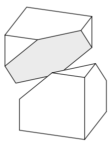
Недолитое пиво. Толстые стенки кружки создают такое впечатление благодаря преломлению луча света, идущего из пива через стекло, а затем по воздуху. Например, самый левый луч от пива вблизи стенки кружки отклоняется в том направлении, где вы видите центр кружки (см. рисунок). Вы видите этот луч и, мысленно продолжив его по прямой обратно к кружке, делаете вывод, что он исходит от точки, расположенной левее, чем на самом деле. И вам кажется, что пива в кружке больше. Толщина и кривизна стекла могут менять и кажущуюся глубину пива. Можно добиться того, что реальное содержимое кружки будет в два раза меньше кажущегося.

Вид сверху на пивную кружку, создающую иллюзию «лишнего» пива

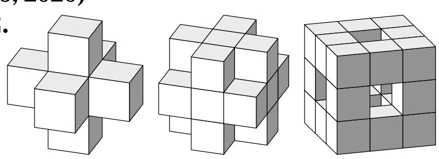
ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВООБРАЖЕНИЕ

(«Квантик» № 6, 2020)

1.



2.



3. Можно. «Ежа» к «ежу» нужно приставлять, как приставлен на рисунке 1 белый «ёж» к розовому или наоборот. Тогда всё пространство заполнится «ежами». Покажем, что «ежи» не наложатся друг на друга и не останется дыр. Добавим сначала ещё 4 голубых «ежа», как на рисунке 2, а потом ещё один белый, как на рисунке 3. Центры восьми «ежей» лежат в вершинах параллелепипеда (непрямоугольного). Замостив копиями этого параллелепипеда пространство, мы также заполним его «ежами».

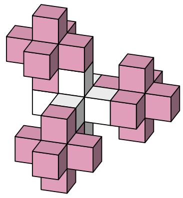


Рис. 1

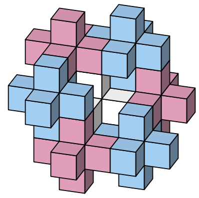


Рис. 2

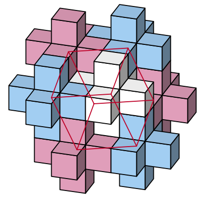


Рис. 3

4. Можно считать, что три грани тетраэдра – это равнобедренные прямоугольные треугольники, на ответ это не повлияет. Плоскости, параллельные этим граням (и делящие рёбра на три равные части), образуют куб, разрезанный на 27 кубиков. Кубик, примыкающий тремя своими гранями к граням тетраэдра, покрасим в зелёный. Три кубика, соседних с ним по грани, – в розовый, а соседние с розовыми – в голубой. На рисунке 4 голубые кубики закрыли собой розовые и зелёный. Четвёртая грань тетраэдра пересекает все голубые кубики и все розовые (по треугольнику, рис. 5). Следующая параллельная ей плоскость пересекает все розовые кубики и зелёный (рис. 6). Наконец, оставшаяся плоскость пересекает только зелёный. Все кубики разрезались на три части, но у каждого голубого кубика только одна часть внутри тетраэдра, у розовых – по две, а у зелёного – все три. Итого: $6\times1+3\times2+1\times3=15$.

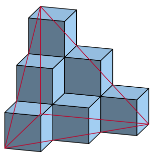


Рис. 4

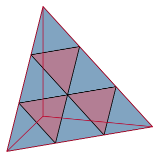


Рис. 5

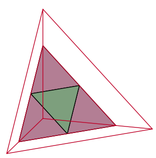


Рис. 6

А вот другие источники наглядных задач:

Дж. Франсис. Книжка с картинками по топологии (как рисовать математические картинки). М.: Мир, 1991.

В. В. Прасолов и И. Ф. Шарыгин. Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.

А. Скопенков и А. Таламбуца. Экстремальные расположения правильных многогранников. Мат. просвещение. 3-я сер., вып. 8, 2004.

«ПРАВОБОКАЯ» МАШИНА И ПРЕСТУПНИК («Квантик» № 6, 2020)

В условии не сказано, ловит ли машина преступника, если оказывается с ним в одной клетке. Проверьте, что ответ от этого не зависит.

Если преступник начинал игру рядом с машиной (рис. 1, красная область), он пойман сразу. Первым ходом машина едет прямо или направо и поймает преступника, если он останется в жёлтой или синей области. То есть за первый ход преступник будет пойман, если он начинал в красной области рисунка 2 (добавились две клетки).

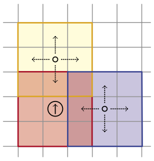


Рис. 1

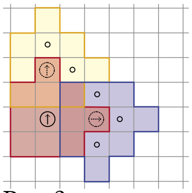


Рис. 2

А где машина поймает преступника за два хода? Если машина сначала едет прямо, то ещё за ход она может поймать преступника в жёлтой области рисунка 2, если вправо – в синей (это копии красной области, только они сдвинуты, а синяя ещё и повёрнута). То есть преступник будет пойман за два хода, если начнёт в части рисунка 2, закрашенной жёлтым или синим, и не сможет за ход из неё убежать.

Возникшие 5 новых точек добавлены в красную область рисунка 3, по ней построены новые жёлтая и синяя области и т. д. (см. рисунки 4–11).

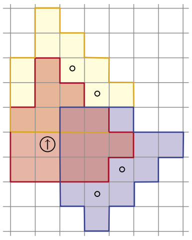


Рис. 3

Кажется, что процесс добавления новых проигрышных позиций будет продолжаться бесконечно. Удивительно, но если полицейские не могут поймать преступника за первые 10 ходов, то они никогда не смогут его поймать – на рисунке 11 никаких новых проигрышных для преступников клеток не добавляется. Тем самым, ответ – красная зона на рисунке 12 (в каждой её клетке указано, за сколько ходов будет пойман преступник, если он стартует из этой клетки).

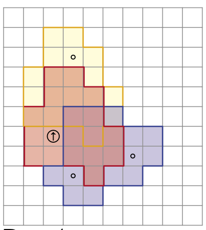


Рис. 4

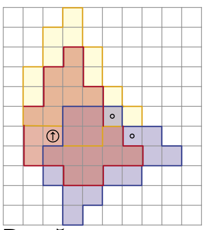


Рис. 5

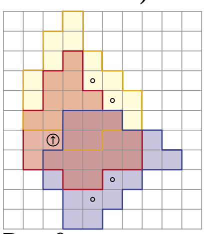


Рис. 6

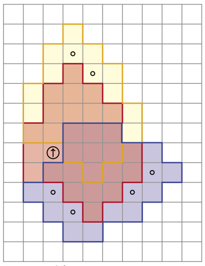


Рис. 7

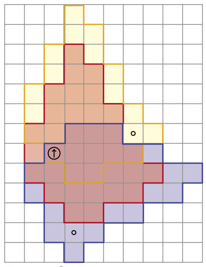


Рис. 8

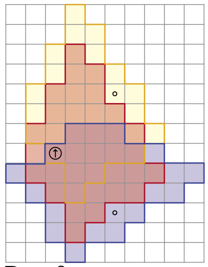


Рис. 9

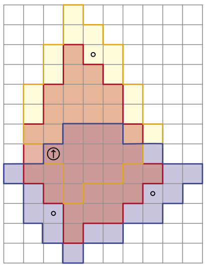


Рис. 10

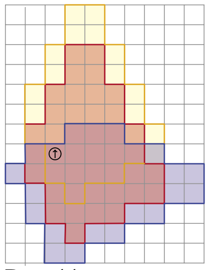


Рис. 11

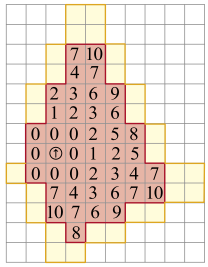
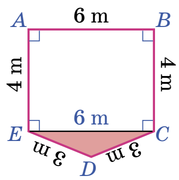


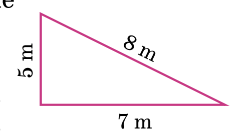
Рис. 12

А если преступник находится вне красной зоны рисунка 12, он сможет избежать поимки. Для этого первым ходом он должен оказаться вне закрашенных клеток рисунка 12 (вне «опасной зоны»). После хода машины вместе с ней сдвигается (и, быть может, поворачивается) и «опасная зона», а преступник снова из неё выходит, и т. д.

ПРОБЛЕМА С ПЕРИМЕТРОМ



Посмотрим на левый нижний рисунок условия. Кажется, что углы при верхней стороне AB прямые. Но тогда $CE = 6$ m и треугольник CDE не существует: одна его сторона равна сумме двух других.



Треугольник в правом нижнем углу условия очень похож на прямоугольный, но для него не выполняется теорема Пифагора: $5^2 + 7^2 = 74 \neq$ $\neq 64 = 8^2$. Если построить настоящий треугольник со сторонами 5, 7 и 8 (попробуйте!), то перепутать его с прямоугольным довольно трудно.

Всего Костя нашёл 5 неверных картинок – а сколько нашли вы?

Можно возразить, что в условии нигде и не сказано, что эти углы прямые. Но хотя говорят, что «геометрия – это искусство правильно рассуждать на неправильных чертежах», лучше, когда чертежи построены аккуратно.

САВРАСОВ, СТРАВИНСКИЙ, РЕПИН

Автор картины «Богатыри» (её ещё называют «Три богатыря») – Виктор Васнецов, а не Алексей Саврасов.

LXXXVI САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Избранные задачи городского тура

1. Суммарное количество цветков у мальчиков уменьшилось на 101. Значит, суммарное количество цветков у девочек увеличилось на 101. Если учесть, что некоторое количество цветков девочки могли отдать соседним слева мальчикам, получается, что от соседних справа мальчиков девочки получили не менее 101 цветка. Но один мальчик не мог отдать более 50 цветков, значит, по крайней мере 3 мальчика передавали девочкам цветы. Таким образом, у каждой девочки сосед справа – мальчик, а тогда никакие две девочки не стоят рядом.

2. Проведём все возможные взвешивания. Тогда фальшивый ребёнок ни разу не окажется на тяжёлой чаше, а любой другой ребёнок – окажется (когда фальшивый будет на противоположной).

3. Десять неподвижных пассажирских вагонов занимают не более 20 рельсов, назовём эти рельсы *пассажирскими*. Если какой-то неподвижный грузовой вагон не занимает ни одного пассажирского рельса, то он делит рельс с другим грузовым вагоном. Пусть такого грузового вагона нет. Но всего неподвижных грузовых вагонов – 21, и тогда какие-то два занимают один и тот же пассажирский рельс.

4. Ответ: 23. Все чётные числа, кроме степеней двойки, сложные. Для чётного $n>23$ имеем

$$n=6+(n-6)=10+(n-10).$$

Здесь n двумя разными способами представлено в виде суммы чётных чисел, слагаемые 6 и 10 – сложные. Если оказалось, что вторые слагаемые в этих разложениях не сложные, то $n-6$ и $n-10$ – степени двойки. Их разность равна 4, а степени двойки с такой разностью – только 4 и 8. Тогда $n=14$, но у нас $n>23$.

Для нечётного $n\geqslant 23$ рассмотрим разбиения

$$n=15+(n-15)=21+(n-21).$$

Здесь 15 и 21 – сложные, а $n-15$ и $n-21$ – чётные. Если оба они степени двойки, то их разность 6, что возможно только для 2 и 8, и $n=23$.

5. Пусть все выписанные числа простые.

Наблюдение 1. При каждой операции сумма цифр числа увеличивалась на 1 или 2. Следовательно, если очередное выписанное число давало остаток 1 при делении на 3, то на следующем шаге должна была прибавляться 1 (если прибавить 2, результат разделится на 3). Если же число давало остаток 2, то на следующем шаге должно прибавляться 2. Итак, попеременно прибавлялись единицы и двойки. Значит, за 55 операций к сумме цифр числа прибавится либо $1+2+\ldots+1=82$, либо $2+1+\ldots+2=83$.

Наблюдение 2. Оценим, на сколько максимум могла увеличиться сумма цифр числа. Первая цифра числа могла увеличиться не более чем на 8 (сначала она 1, в конце – не более 9), последняя цифра – не более чем на 2 (она не могла быть чётной или пятёркой, поэтому могла лишь вырасти от 1 к 3 или от 7 к 9), остальные цифры – не более чем на 9. Итого, сумма цифр увеличилась не более чем на $8+2+8\cdot 9=82$, и это могло произойти лишь если первое число – это 1000000001 или 1000000007, а последнее – соответственно 9999999993 или 9999999997.

Из наблюдений 1 и 2 следует, что в описанном процессе мы увеличили сумму цифр числа ровно на 82, попеременно прибавляя 1 и 2, и первая и последняя операции были прибавлениями 1, а начальные и конечные числа равны указанным выше. Но 1000000001 и 1000000007 дают остаток 2 при делении на 3, и первой операцией должно быть прибавление 2.

6. Ответ: Дима. Разобьём таблицу на два прямоугольника 7×441 – верхнюю и нижнюю половины. Пусть Дима ходит так. Если есть 6 ноликов, которые можно дополнить до 7 ноликов в ряд (назовём такую комбинацию *выигрышной*), – он ставит седьмой нолик и выигрывает. Иначе повторяет ход Гоши в другой половине, так что после каждого хода Димы нолики в верхней половине при сдвиге вниз на 7 клеточек совпадают с ноликами в нижней половине.

Пусть Гоше удалось победить. Тогда после предыдущего хода Димы оказалась выигрышная комбинация из 6 ноликов. Если они расположены в одной половине, то и перед ходом Димы в другой половине была такая же комбинация, и Дима бы выиграл. Пусть эти 6 ноликов расположены в обеих половинах. Тогда они расположены вертикально в одном столбце, и никакие два из них не переходят друг в друга при совмещении половин таблицы. Значит, после хода Димы в этом столбце было 12 ноликов, а перед ходом – 11. Но если в столбце 11 ноликов, то в одной из его половин – 6 ноликов, выигрышная комбинация, и Дима бы выиграл.

Значит, Гоша не может одержать победу.