МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

СЛЕДУЮЩЕЕ ЧИСЛО

Мышь Огрыза перелистывала гроссбух (огромную амбарную книгу для записей) и что-то бормотала себе под нос.

– Что новенького пишут нынче в гроссбухах? – то ли в шутку, то ли всерьёз спросил дятел Спятел.

– «10 августа. Доставлена партия вишнёвого варенья», – прочитала Огрыза.

Таракан Кузька тут же побежал к полкам.

– Нашёл! – через некоторое время прокричал он. – Раз, два, три, четыре! Тут целых четыре банки вишнёвого варенья.

– Изумительный порядок! – похвалил дятел Спятел, пройдя вдоль полок. – Все банки снабжены этикетками и пронумерованы.

– Да, – согласилась Огрыза, – без этого невозможно вести хозяйство. Однако я помню, что банок было значительно больше, Бусенька помогала мне их расставлять…

– Их было шесть штук, – подтвердила Бусенька.

– Ну-ка, посмотрим… у меня всё записано… – И Огрыза снова углубилась в изучение гроссбуха.

– Я нашёл банки №5 и №6, – крикнул дятел Спятел из другого конца Ам-бара.

– Я тоже нашла! – гордо сообщила Огрыза, показывая запись. – Всё сходится.

Вишнёвое варенье

Банка 1	1111101
Банка 2	11111011
Банка 3	11111011111
Банка 4	111110111111
Банка 5	11110111
Банка 6	111101111

– «Банка 1, 1111101» – прочитал Кузька. – Что значит 1111101?

– Это, наверно, 125, – предположил дятел Спятел.

– Эта учётная запись обозначает номер места хранения, – объяснила Огрыза. – Сначала записан номер полки, потом 0, а дальше номер места на полке.

– Одиннадцать тысяч сто одиннадцатая полка? – удивился Кузька.

– Ну... не совсем... – смутилась Огрыза. – Дело в том, что грузчики, которые приносят и уносят банки, не слишком сильны в арифметике. Поэтому, записывая номера полок и мест, я пользуюсь самой примитивной системой счисления – единичной! Чтобы записать число 3, пишем три единицы; чтобы записать число 7, пишем семь единиц.

– Ага, – воодушевился Кузька, – значит, банка №1 стоит на пятой полке на первом месте, а банка №5 – на четвёртой полке на третьем месте.

– Как видите, не такое уж это хитрое дело – пронумеровать свои сокровища.

– Как хорошо, что здесь, в Амбаре, – сказал дятел Спятел, – может поместиться лишь конечное число всяких баночек-скляночек и пакетиков. По крайней мере, их всегда удастся перенумеровать. Куда забавней, если бы запасы были бесконечными.

– А что тут хитрого? – спросила Огрыза. – Берёшь элемент бесконечного множества, приклеиваешь к нему ярлычок «№1», потом берёшь следующий элемент множества, приклеиваешь к нему ярлычок «№2», потом следующий – «№3». Ну и так далее, пока все элементы не перенумеруются. Довольно скучное занятие.

– А ярлыков точно хватит? – усомнился дятел Спятел.

– Погодите, я не понимаю, – перебил Кузька. – Что такое следующий элемент? Вот возьмём натуральные числа – сначала идёт число 1, следующее – число 2, затем 3, потом 4... Всё понятно. А теперь переключимся на рациональные числа. Берём рациональное число 1. Какое рациональное число следующее?

– Куда следующее? Следующее рациональное? – переспросила Огрыза.

– Да, следующее рациональное, то есть такое число x, что x больше 1, но между 1 и x нет других чисел.

– Нет других? Куда же они подевались? – забеспокоился дятел Спятел.

– Никуда не подевались. Нет и всё. Между 1 и 2 нет других натуральных чисел, а между 1 и x нет других рациональных.

– Так не бывает, – поняла наконец Огрыза. – Возьмём среднее арифметическое $\frac{1+x}{2}$. Оно больше 1, но меньше x.

– Ничего себе, – восхищённо произнёс Кузька. – Получается, что рациональные числа на числовой прямой представляют собой сплошное множество без пропусков и дыр!

– Не совсем сплошное. А очень даже с пропусками и с дырами. Вот, например, $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

– Как число может не быть рациональным? Если оно не рациональное – значит, его не существует!

– Корня из двух не существует? – с тревогой спросил дятел Спятел.

– А он что – не рациональный?

– Не рациональный!

– Значит, не существует, это просто игра воображения!

– А как же уравнение $x^2 = 2$? – ещё больше забеспокоился дятел Спятел.

– Оно не имеет корней!

– Ну как же не имеет? Вот я нарисую маленький квадратик, а потом начну его увеличивать, пока его площадь не станет равна 2. А сторона квадрата в этот момент станет равна $\sqrt{2}$.

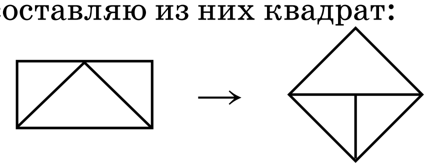
– Значит, площадь квадрата не может стать равной 2! Квадратов площади 2 не бывает!

Дятел Спятел беспомощно посмотрел по сторонам.

– А прямоугольники площади 2 бывают? – поспешила вмешаться Бусенька.

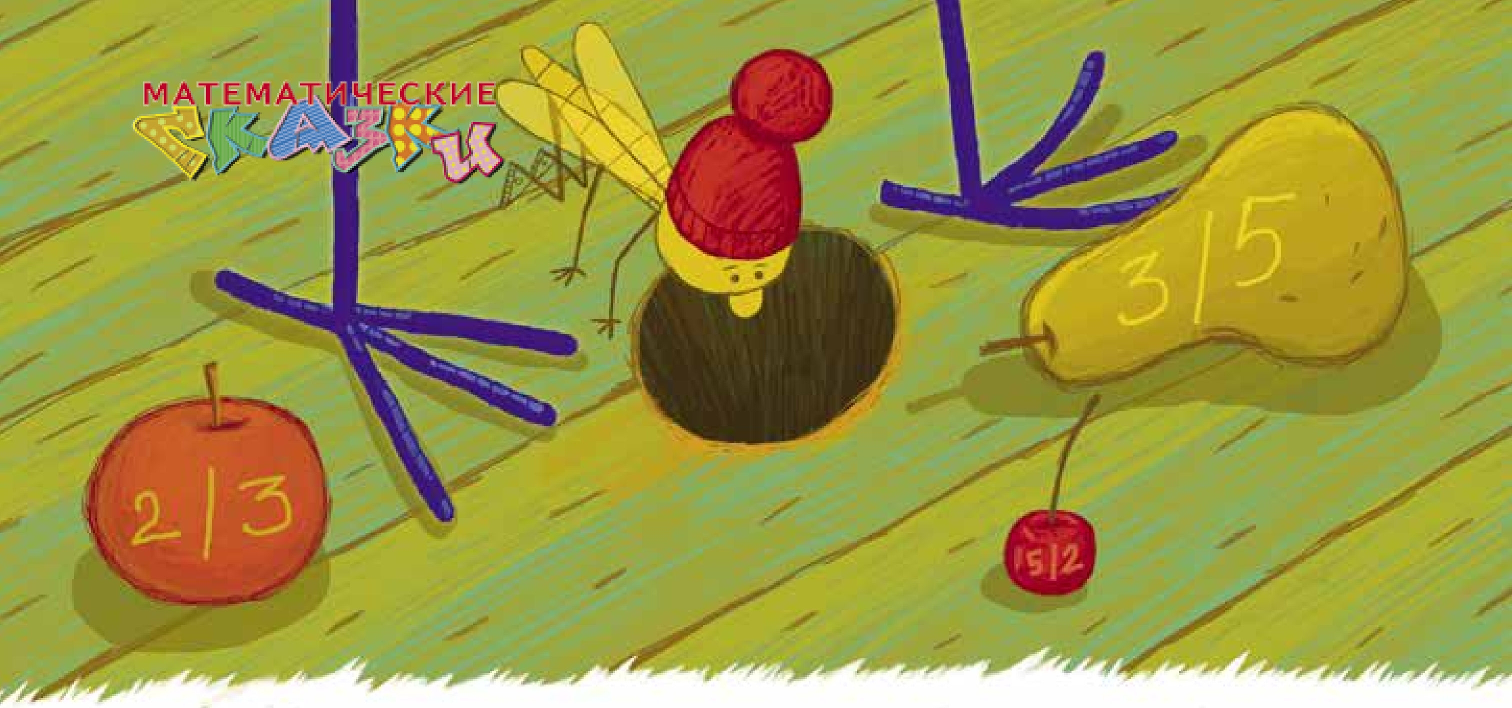
– Конечно, бывают. Например, прямоугольник 1×2.

– Тогда смотри – фокус. Я беру прямоугольник 1×2, разрезаю его на части и составляю из них квадрат:



– Как всё сложно... – утомлённо произнёс Кузька. – Может быть, площадь меняется при перемещении фигуры? Голова кругом идёт.

– Мне кажется, кто-то из нас спятил, – заявила Огрыза и, поглядев на совсем деморализованного Кузьку, до-



бавила: – Получается, что множество рациональных чисел дырявое, а в этих дырках сидят иррациональные числа!

– Точно, – подтвердила Бусенька. – Именно поэтому математика работает не только с рациональными числами, но и с иррациональными. Они вместе образуют множество вещественных чисел.

– И оно уже не дырявое? – ожил Кузька.

– Да. Оно совсем сплошное.

– А что это значит – «сплошное»?

– Это значит, что в нём выполняется такое свойство: если мы возьмём два множества вещественных чисел, назовём их «Левое» и «Правое», так что все числа из Левого множества меньше всех чисел из Правого, то между этими множествами обязательно находится разделяющее число x. Оно не меньше всех чисел из Левого множества и не больше всех чисел из Правого.

– Как хитро. А причём тут «сплошное» или «дырявое»?

– Если бы в множестве вещественных чисел на числовой прямой была дырка, мы могли бы в качестве Левого множества взять все числа, которые левее дырки, а в качестве Правого – все числа, которые правее дырки. И тогда наше свойство сообщает, что есть ещё разделяющее число x.

– И оно как раз будет сидеть в дырке! – догадался Кузька. – Какое полезное свойство. И как оно называется?

– Аксиома непрерывности.

– Ужасное название. Слишком наукообразное! Давайте называть её аксиомой сплошноты!

– Зачем тебе её называть? – с подозрением спросил дятел Спятел. – Ты что, собираешься ею пользоваться?

– Конечно, – сказал Кузька, – интересная штучка! С помощью этой аксиомы мы доказали, что не бывает следующего рационального числа. Может, она и ещё для чего-нибудь пригодится.

– Нет, это мы доказали без аксиомы, – возразила Бусенька. – К тому же мы доказали лишь, что не бывает рационального числа, «следующего по возрастанию» за 1, то есть не существует такого рационального числа

$x > 1$, что между ним и единицей нет других рациональных чисел. Но ничто не мешает нам выбирать следующее рациональное число не по возрастанию, а, так сказать, вперемешку. Сначала выберем первое число, потом второе, потом третье... В результате каждое рациональное число получит номер, а следующее число – это то, у которого следующий номер.

– Как же это сделать? Рациональных чисел так много...

– Да запросто – расфасуем их по банкам с вареньем! Запишем рациональное число в виде несократимой дроби и положим в банку с вареньем: номер полки – это числитель, а место на полке – знаменатель. А учётная запись этой банки будет считаться номером рационального числа.

– Ах! Вишнёвое варенье с корицей, миндалём и рациональными числами, – пошутил дятел Спятел, – для улучшения рациона.

– Но в этой нумерации Огрыза пользуется только нулями и единицами! Получается, что у нас нет числа № 2?

– Не привередничай, – сказала Бусенька. – Да, у нас нет числа № 2. И числа № 1, кстати, тоже нет.

Мы ухитрились пронумеровать все положительные рациональные числа, использовав в качестве номеров лишь часть множества натуральных чисел. Самый маленький номер – № 101 – получила единица. Следующее число – № 1011 – это 1/2. Потом идёт № 1101 – это 2. Ну и так далее.

– Какое расточительство, – сказала Огрыза, – даже номера, состоящие из нескольких единиц и одного нуля, использованы не все! Число № 11011 – это должна быть опять единица, но мы ведь её уже пронумеровали как 101, значит, номер 11011 тоже оказался не нужен.

– Ничего страшного, – успокоил её дятел Спятел, – сэкономленные номера мы используем для нумерации ещё чего-нибудь. Например, для нумерации отрицательных рациональных чисел. Или многочленов с рациональными коэффициентами!

Художник Инга Коржнева