Математический кружок

Егор Бакаев

Комбинации квадратов

Художник Алексей Вайнер

Разберём несколько задач про квадраты – от простых до довольно сложных. Зачастую написаны только план или идеи – полные решения попробуйте получить самостоятельно.

1. Даны два квадрата с общей вершиной. Докажите, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны (рис. 1, *а*).

План первого решения. Два треугольника, заштрихованных синим (рис. 1, *б*), равны по первому признаку. Тогда пунктирные отрезки равны как соответствующие стороны. Перпендикулярны они потому, что в двух треугольниках, обведённых зелёным, равные наборы углов.

Аналогичное утверждение верно и для квадратов на рисунке 1, *в* (найдём два равных треугольника, продлим пунктирные отрезки до пересечения и завершим решение, как раньше).

Второе решение использует *поворот*. Поясним, что это такое. Сделаем копию чертежа на прозрачной плёнке и наложим её на чертёж так, чтобы оригинал и копия совпали. Воткнём в стол иглу, проколов чертёж и копию. Если теперь подвинуть плёнку, копия чертежа повернётся вместе с ней вокруг точки, в которую воткнута игла.

Перечислим основные свойства поворота. Пусть поворот был совершён вокруг точки O, точка A перешла в точку A', точка B – в точку B' (рис. 1, *г*). Тогда:

1) углы AOA' и BOB' равны (все точки поворачиваются на один и тот же угол);

2) фигуры переходят в равные им;

3) угол между прямыми (точнее, лучами) AB и $A'B'$ равен углу поворота.

Вернёмся к задаче. Повернём конструкцию на 90° вокруг общей вершины квадратов (рис. 1, *д*). В каждом квадрате одна вершина перейдёт в другую (ведь

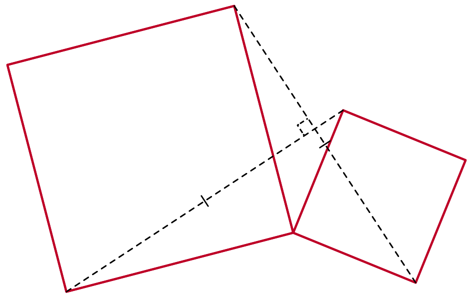

Рис. 1, *а*

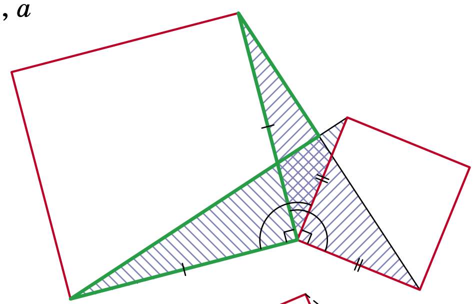

Рис. 1, *б*

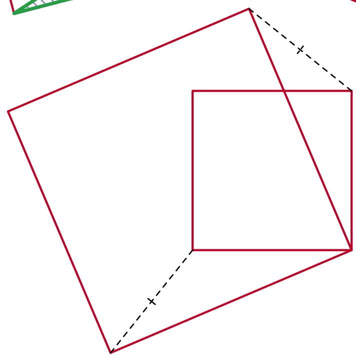

Рис. 1, *в*

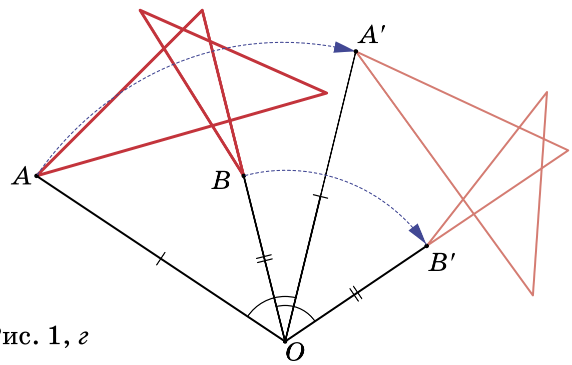

Рис. 1, *г*

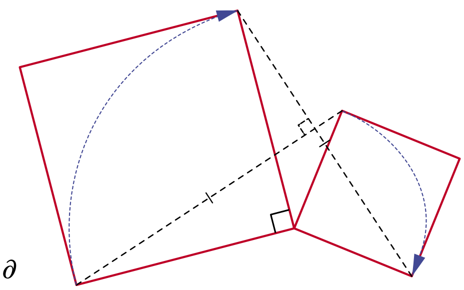

Рис. 1, *д*

соседние стороны квадрата равны и перпендикулярны). Но тогда один пунктирный отрезок перейдёт в другой. По свойству 2 эти отрезки равны, а по свойству 3 они перпендикулярны.

2. Докажите, что центр синего квадрата – это середина отрезка, соединяющего вершины двух красных квадратов (рис. 2, *а*).

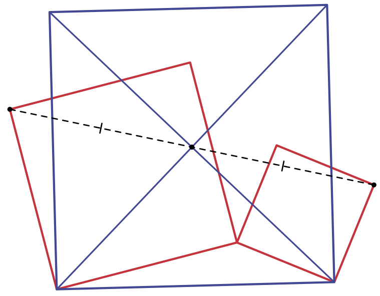

Рис. 2, *а*

Решение. Тут есть такие же пары квадратов, как в задаче 1. Взяв две такие пары, получим, что три заштрихованных треугольника равны (рис. 2, *б*). Итак, на противоположных сторонах квадрата построены равные треугольники и надо доказать, что их вершины лежат на одной прямой с центром квадрата.

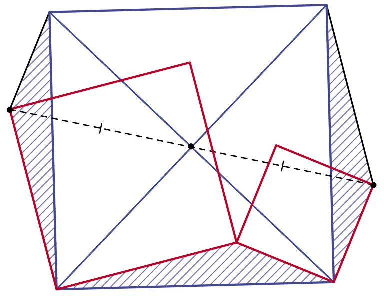

Рис. 2, *б*

Рассмотрим симметрию относительно центра синего квадрата. (Центральная симметрия – это поворот на 180°.) Квадрат симметричен самому себе, а боковые треугольники – друг другу. Значит, вершины боковых треугольников не только лежат на одной прямой с центром квадрата, но и равноудалены от него.

Можно было доказать это и без симметрии, а с помощью равенства треугольников – подумайте, как.

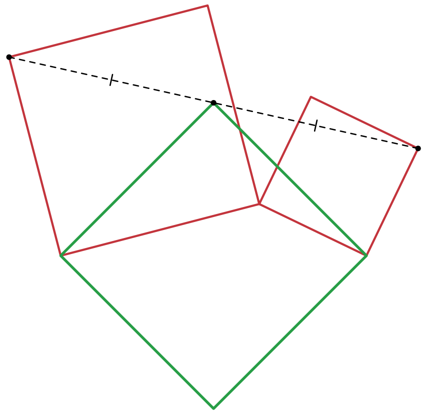

Рис. 3, *а*

3. На рисунке 3, *а* даны три квадрата. Докажите, что вершина зелёного квадрата – это середина отрезка, соединяющего вершины красных квадратов.

Первое решение. Добавив синий квадрат (рис. 3, *б*), получим конструкцию из задачи 2, и всё доказано.

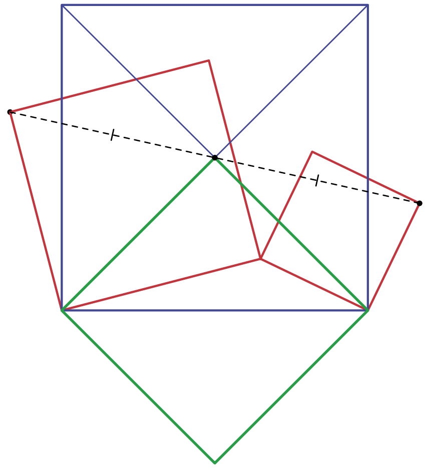

Рис. 3, *б*

Второе решение. Применим задачу 1 для зелёного и одного из красных квадратов. Получим, что синий и один из чёрных отрезков равны и перпендикулярны (рис. 3, *в*). Для зелёного квадрата и другого красного квадрата получим то же самое для синего и второго чёрного отрезков. Значит, отрезки из условия задачи равны и лежат на одной прямой.

4. Даны два квадрата и отрезок, соединяющий их вершины (рис. 4). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Решение. Эта задача обратна предыдущей. В ней мы доказали, что вершина зелёного квадрата – середина отрезка. Но у отрезка только одна середина, поэтому пунктирные отрезки равны и перпендикулярны, так как это стороны зелёного квадрата из предыдущей задачи.

5. Даны три квадрата (рис. 5, *а*). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Решение. Комбинация квадратов тут такая же, как в задаче 3. Используя её, получим, что вершина зелёного квадрата лежит на середине отрезка, соединяющего две вершины красных квадратов (рис. 5, *б*). Теперь, зная, что это середина отрезка, воспользуемся задачей 4.

6. Противоположные вершины синего квадрата лежат в центрах красных квадратов (рис. 6, *а*). Докажите, что другие две вершины синего квадрата – это середины отрезков, соединяющих вершины красных квадратов.

Решение. Применим к зелёным квадратам и синему квадрату утверждение задачи 3 (рис. 6, *б*). Для другой вершины утверждение доказывается аналогично – берём такие же квадраты, но построенные «с другой стороны».

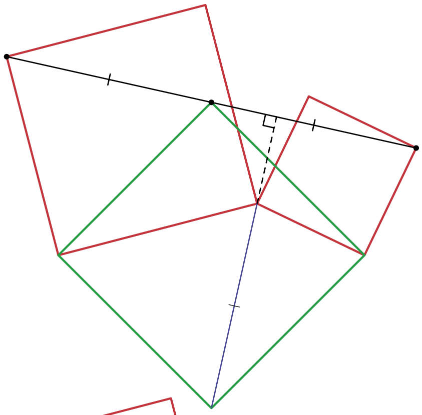
Рис. 3, *в*

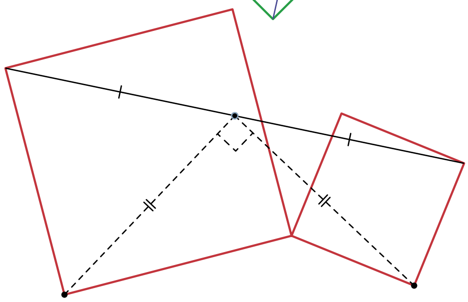
Рис. 4

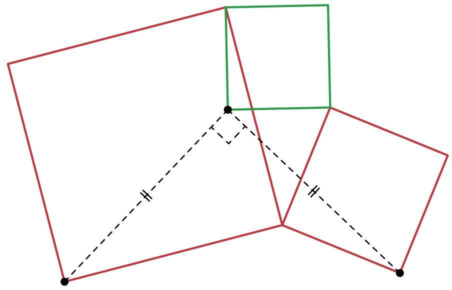
Рис. 5, *а*

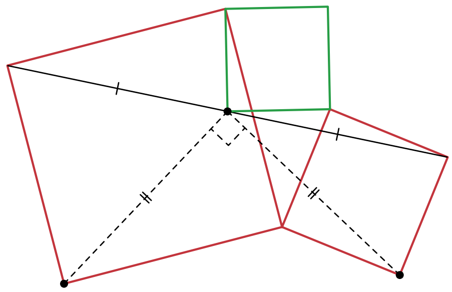
Рис. 5, *б*

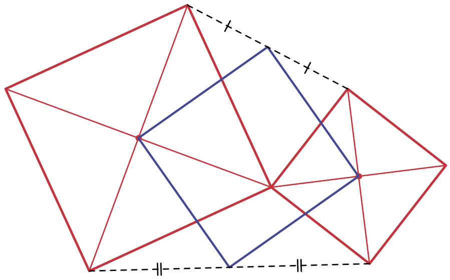
Рис. 6, *а*

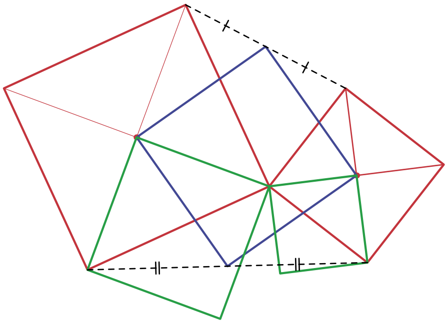
Рис. 6, *б*

7. На сторонах четырёхугольника во внешнюю сторону построены четыре квадрата (рис. 7, *а*). Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим красные квадраты (рис. 7, *б*). По задаче 6 середина зелёной диагонали четырёхугольника будет их общей вершиной. Применив к красным квадратам задачу 1, получим, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.

8. На сторонах четырёхугольника во внешнюю сторону построены четыре квадрата (рис. 8, *а*). Докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и середины отрезков, соединяющих центры противоположных квадратов, образуют квадрат.

Решение. Рассмотрим те же красные квадраты, что в решении предыдущей задачи (рис. 8, *б*).

Применим к ним задачу 1. Один отрезок переходит в другой при повороте вокруг их общей вершины на 90°. Тогда середина одного отрезка переходит в середину другого. Значит, отрезки, соединяющие эти середины с центром поворота, равны и перпендикулярны (по свойствам 2 и 3 поворота).

Таким образом, три точки образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассмотрев другую пару красных квадратов, аналогично получим, что другая тройка точек тоже образует равнобедренный прямоугольный треугольник с той же гипотенузой. Значит, они образуют квадрат.

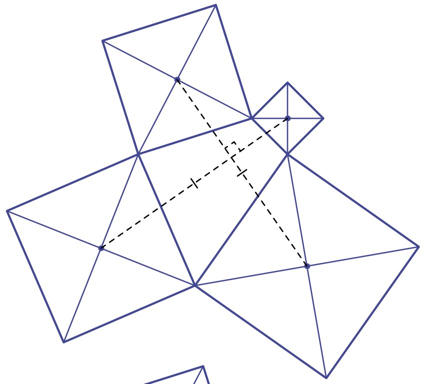

Рис. 7, *а*

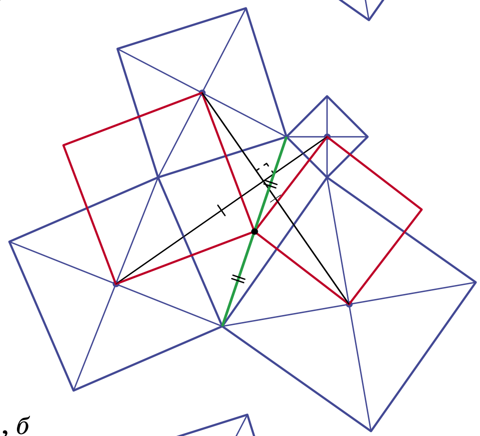

Рис. 7, *б*

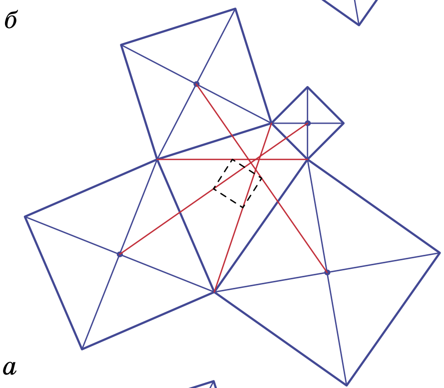

Рис. 8, *а*

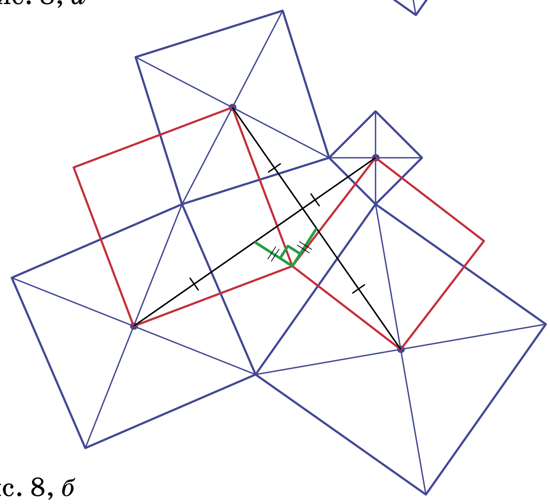

Рис. 8, *б*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Условия задач приведены на рисунках 9–14. Отрезки, утверждение про которые надо доказать, проведены пунктиром (в каждой задаче надо либо доказать, что отрезки перпендикулярны, либо доказать, что три точки лежат на одной прямой). Указания – в следующем номере.

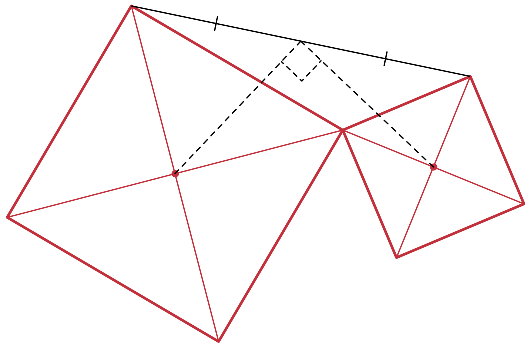

Рис. 9

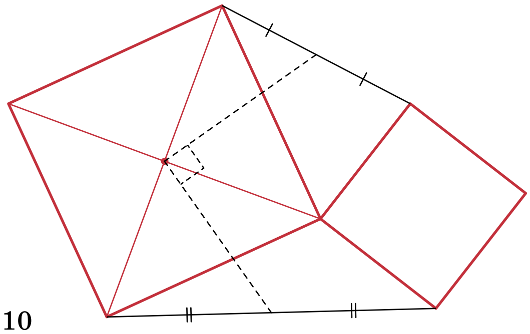

Рис. 10

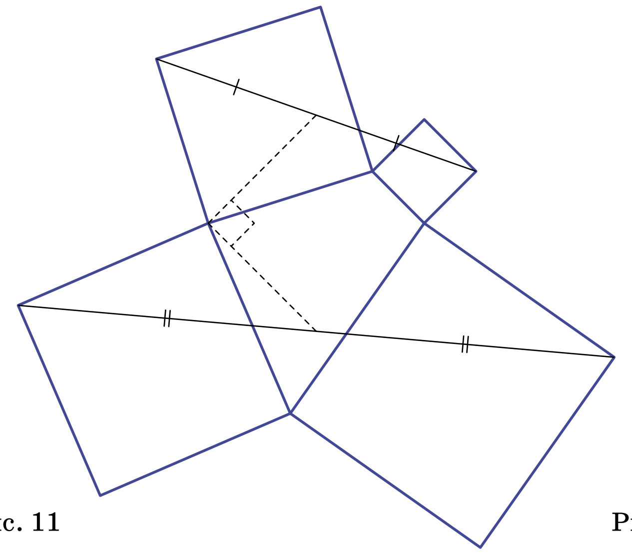

Рис. 11

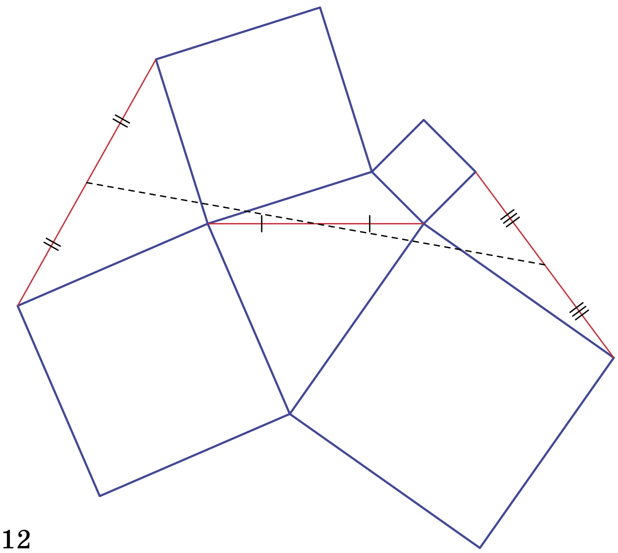

Рис. 12

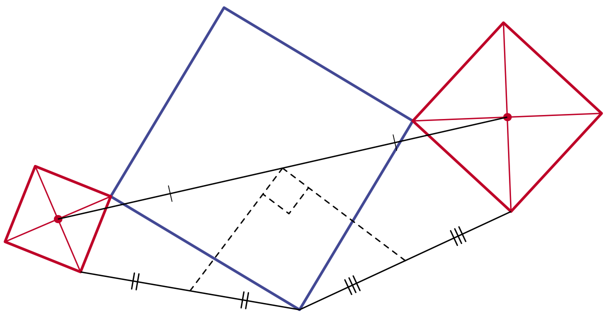

Рис. 13

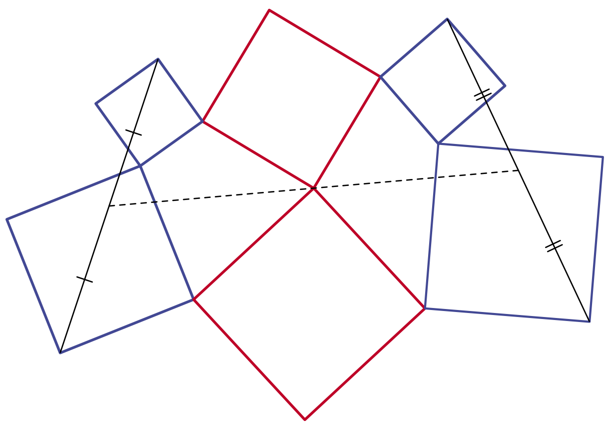

Рис. 14

Ответы в следующем номере