ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

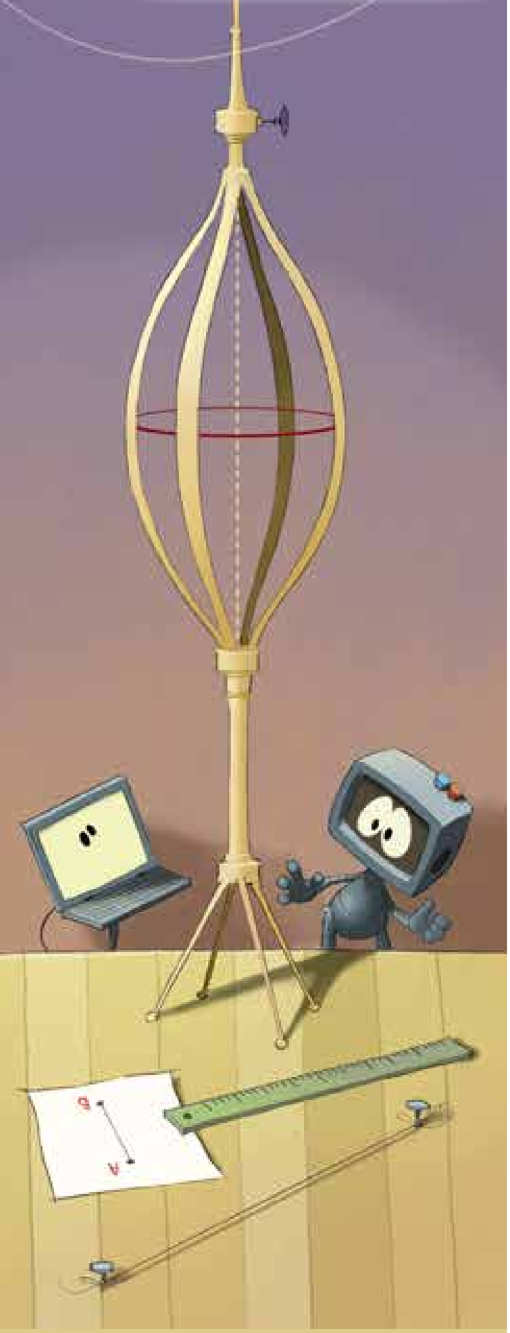
Валерия Сирота

Иди всё прямо, никуда не сворачивая.

Баба Яга

А я пойду прямо,
Ни влево, ни вправо...

М. Щербаков



ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, или ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Легко идти прямо, никуда не сворачивая, когда впереди прямая ровная дорога. Или хотя бы широкая равнина, а вдали видно цель или ориентир – куда идём. А если на пути холмы и овраги, да к тому же вокруг туман или темно? Поди тогда пойми, где тут «прямо». И что вообще такое «идти по прямой», когда идёшь по кривому склону горы? И если идти по этому склону не сворачивая, то куда придёшь?

Вот с подобными вопросами мы и попробуем разобраться. Начнём с того, что такое прямая (обычная, настоящая, на плоскости). Лучше всего подойдёт, пожалуй, такое **определение**:

Прямая – это такая линия на плоскости, которая любые две свои точки соединяет по кратчайшему пути.

То есть возьмём на прямой любые две точки. Проведём все возможные линии (пути) из одной точки в другую. Тогда отрезок нашей прямой – самая короткая из всех этих линий (рис. 1).

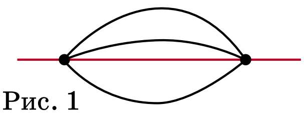


Рис. 1

Такое определение соответствует наставлению «идти прямо»: в какой бы точке прямой ни находилась цель, эта прямая – кратчайший путь к ней. Правда, если цель окажется не на вашей прямой, вы к ней никогда не придёте...

Упражнение 1. Докажите, что ломаная линия (рис. 2) не является прямой. (Если трудно – см. подсказку[1] внизу страницы.)

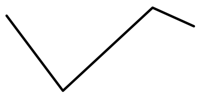


Рис. 2

Из этого упражнения мы видим, что наше определение не велит «никуда сворачивать»: нельзя резко повернуть, от этого получится ломаная, а это – не кратчайший путь.

Упражнение 2. Учёный Сигизмунд изучает некую линию и хочет доказать, что это – прямая. Он уже смог доказать, что путь из точки A в точку D вдоль этой линии – кратчайший из всех возможных. Дока-

[1] *Подсказка.* Чтобы доказать, что линия – не прямая, нужно найти несоответствие определению, то есть найти хотя бы одну пару точек, для которых условие, данное в определении, не выполняется.

жите, что если точки B и C лежат на этой линии между A и D, то путь из B в C вдоль этой линии – тоже кратчайший.[2]

Упражнение 3. А учёный Максимилиан изучает другую линию с точками A, B и C на ней. Он уже доказал, что путь из A в B вдоль этой линии – кратчайший возможный, а также что путь вдоль линии из B в C – тоже кратчайший. Значит ли это, что путь из A в C вдоль этой линии – тоже кратчайший, или это надо проверять отдельно?

С прямой линией на плоскости разобрались. А теперь попробуем применить это определение к кривой поверхности. Например, пусть у нас есть очень крутая и высокая гора (рис. 3). Какой путь из точки A в точку B – самый короткий? Уж конечно, не через вершину. Кратчайший путь явно проходит где-то вдоль подножия горы, как показывает зелёная линия на рисунке. Как видно из упражнения 2, для любой пары точек между A и B на этой линии условие кратчайшего пути тоже выполняется. Выходит, это и есть прямая? Более того – если гора симметричная и точки A и B расположены строго по разные стороны от неё, таких кратчайших путей два! Что же, они оба – прямые?!

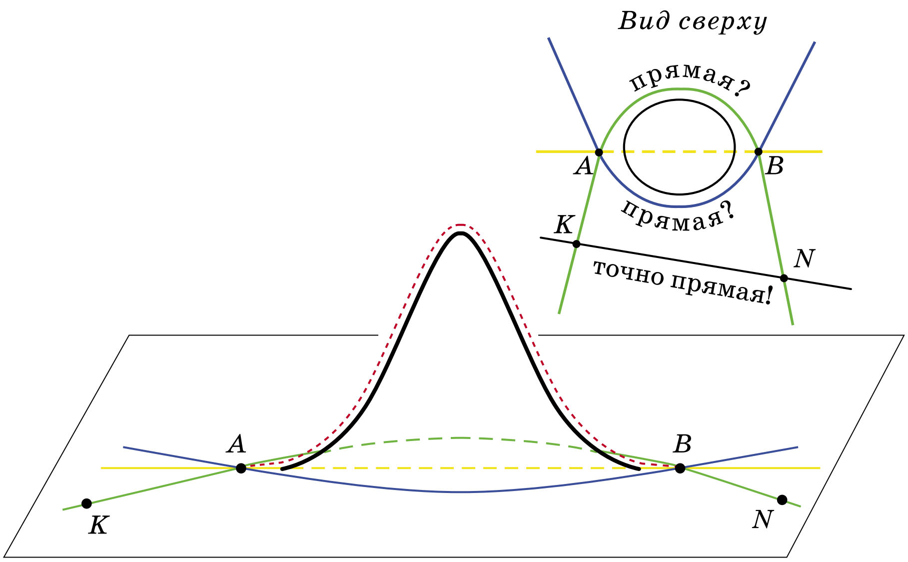
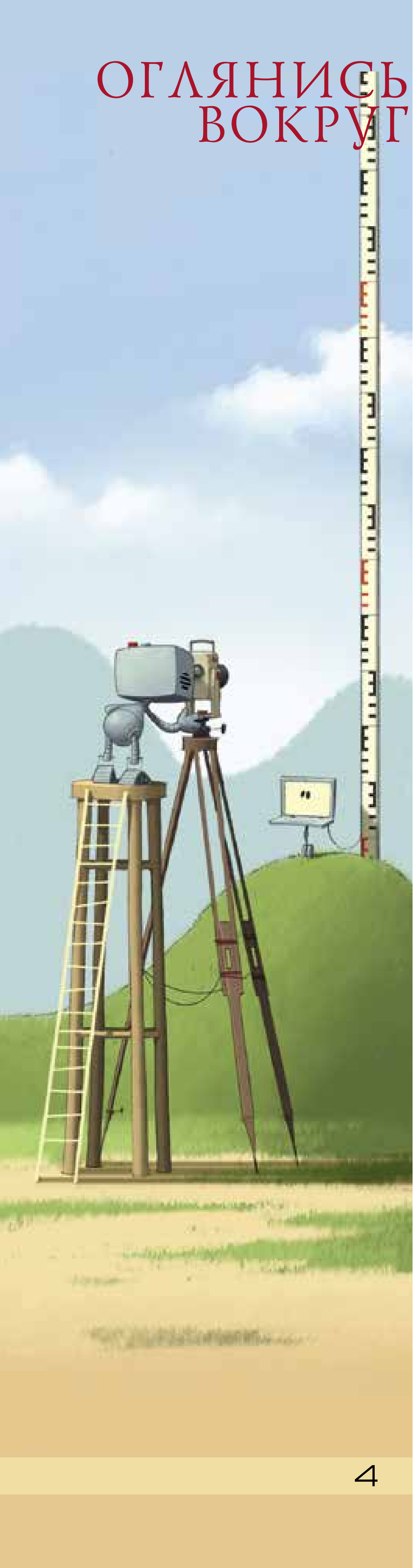


Рис. 3

[2] *Подсказка*. А если это не так и путь из B в C вдоль этой линии не кратчайший – что тогда? Нужно вывести из этого предположения такое следствие, которое противоречит данным задачи. Тем самым вы докажете, что предположение было ошибочным. Это называется *доказательством от противного.*



Почти что так. Но есть одна проблема: как правильно нарисовать продолжения этих «прямых» за точки A и B? Эти продолжения проходят по ровной местности и будут уже похожи на отрезки «настоящих» прямых. Но мы помним (см. упражнение 1), что изломов на «прямой» быть не должно, возле точки излома условие «кратчайшего пути» нарушится. Поэтому «концы» нашей зелёной «прямой», проходящей через A и B, будут очень далеки от той прямой, которая проходит через точки A и B в пространстве (и которая не лежит на обсуждаемой поверхности!).

И вот тут – засада: ведь если мы отойдём от горы, то окажется, что обходить её уже не нужно! Продвигаясь дальше вдоль нашей «прямой», мы вдруг обнаружим, что условие её «прямоты» нарушено: кратчайший путь из точки K в точку N на рисунке 3 уже проходит совсем не по этой линии!

Что же, определение прямой было неправильным? Или невозможно распространить его на гористую местность? Нет, всё не так страшно: просто надо его чуть-чуть подправить. Ведь любая изогнутая поверхность в каждой маленькой своей части похожа на плоскость.

Чтобы «идти всё прямо, прямо», нужно всё время смотреть не на далёкую цель (вдруг ваша прямая не проходит через неё на самом деле?!), а всего на шаг вперёд. Тогда вы не заметите никакой кривизны поверхности, а просто будете делать каждый следующий шаг в том же направлении, что и предыдущий. И каждый маленький кусочек пройденного вами пути будет прямым.[3]

Поэтому в наше определение для случая кривой поверхности добавим только два слова: путь по ней должен быть кратчайшим для любых двух *достаточно близких* точек. Теперь всё в порядке: пару точек K и N в нашем примере можно уже не рассматривать, потому что они недостаточно близкие!

Поскольку всё-таки как-то совестно называть эти

[3] Учтите, что пользоваться этим правилом в реальной жизни опасно. Во-первых, в лесу вы неминуемо наткнётесь на дерево. Во-вторых, человек обычно не совсем симметричен и при ходьбе даже на плоскости может систематически отклоняться от прямой линии в какую-то одну сторону.

изогнутые линии прямыми, их называют красивым словом *геодезические*. Это – обобщение понятия прямой на случай искривлённой поверхности. Итак:

Геодезическая, или геодезическая линия *на поверхности – это такая линия, что любой достаточно маленький её кусочек – кратчайший из всех возможных на этой поверхности путь между его концами.*

Менее строго можно сказать, что геодезическая – это кривая, которая на каждом маленьком (почти плоском) кусочке выглядит как прямая.

Кстати, теперь в нашем примере с симметричной горой, кроме двух геодезических, которые мы нарисовали, через точки A и B проходит ещё как минимум третья – это тот самый путь через вершину горы, который мы вначале забраковали как не самый короткий. Теперь можно просто объявить точки A и B недостаточно близкими – а на каждом коротеньком участочке этот путь «в лоб» вполне похож на прямую.[4]

Как видите, аксиома Евклида, утверждающая, что через любые две точки (плоскости) можно провести ровно одну прямую, для геодезических на кривых поверхностях совсем не работает. Может, есть и ещё «прямые», ведущие из A в B? Это зависит от формы горы.

Полезно ещё иметь в виду, что путь, «прямой» в действительности (то есть геодезический), на карте может казаться изогнутым, как это случилось с зелёной и синей линиями на рисунке 3.

***

Ура! Мы теперь знаем, что такое «идти прямо и не сворачивать» на любом рельефе – это и есть движение по геодезической линии. Теперь для любой поверхности мы можем задаваться такими вопросами:

1) Как выглядят её геодезические?

2) Как провести геодезическую (или геодезичес**кие**) через 2 заданные точки?

[4] Обратите внимание: точки должны быть достаточно близкими, именно если идти по выбранной линии. На рисунке 3 точки A и B довольно близки, если идти понизу. Но «через верх» они не близки. Скоро мы увидим, что геодезическая может очень близко подходить «сама к себе», делая на кривой поверхности петлю, – но такие точки, пусть и близкие на местности, не считаются: они не близки «вдоль кривой».

В общем случае это задача сложная, поэтому предлагаю погулять по поверхностям простым, «почти плоским» – цилиндру и конусу.

Цилиндр

Сделать цилиндр из подручных средств легко (рис. 4): берём лист бумаги, сворачиваем в трубочку и склеиваем (лучше по длинной стороне). Теперь можно посадить на него жука (лучше воображаемого) и чертить геодезические, по которым он будет ползти.

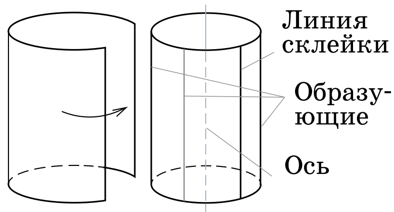


Рис. 4

Если с самого начала выбрать направление, параллельное линии склейки, то жук так и будет ползти по прямой, параллельной этой линии (и оси цилиндра); такие прямые называются *образующими*. Если начать движение в направлении, перпендикулярном оси, то геодезическая представляет собой окружность – сечение нашего цилиндра.

Задача на следующий раз. А какая линия получится, если отправиться в каком-нибудь другом направлении, например по диагонали?[5]

Конус

Самые шустрые могут ещё и по конусу прогуляться. Его тоже легко склеить. Проще всего взять большой лист бумаги, выбрать на одной из его сторон точку – это будет вершина конуса – и склеить между собой две разделённые этой точкой половинки стороны (рис. 5). То, что основание конуса получается неровное и даже с торчащими углами, – не беда: можно считать, что настоящая коническая поверхность бесконечна и это у нас только её кусочек.

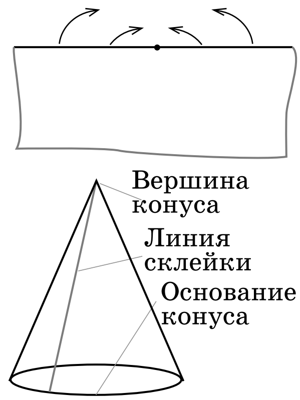


Рис. 5

Ещё задача. Как выглядят геодезические на этой поверхности?

Продолжение следует

[5] *Подсказка.* Не спешите склеивать цилиндр, на развёртке чертить удобнее... Хотя вам, возможно, придётся провести не одну линию на развёртке, чтобы жук не остановился «посреди цилиндра». А вот когда начертите, сложите цилиндр и проверьте, что ваша геодезическая проходит линию склейки без разрывов и изломов.

Художник Алексей Вайнер