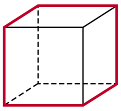
НАШ КОНКУРС, X тур («Квантик» № 6, 2020)

46. *Квантик получил по почте кубическую посылку, запечатанную со всех сторон. Он хочет открыть коробку, разрезав её по рёбрам на две части, но так, чтобы у любой грани было разрезано не более двух рёбер. Удастся ли ему это?*



Ответ: да. Можно разрезать коробку по красным рёбрам, как на рисунке.

47. *Два лифта едут вниз с одинаковой скоростью с 95-го этажа офисного небоскрёба. Второй лифт стартовал через 45 секунд после первого. На этажах с номерами, делящимися на 2 или 3, стоит по сотруднику (остальные этажи пустые). Всем нужно на первый этаж. Лифт, приехавший к сотруднику первым, останавливается на 10 секунд, чтобы его забрать (другой лифт проезжает мимо). Какой лифт раньше попадёт на первый этаж?*

Ответ: второй лифт. Четыре сотрудника на этажах 94, 93, 92 и 90 будут подобраны первым лифтом. После этого первый лифт будет опережать второй на 5 секунд, и на каждом этаже с сотрудником лифты будут «меняться местами».

Разобьём этажи на шестёрки: со 2-го по 7-й, с 8-го по 13-й, ... , с 80-го по 85-й. В каждой – 4 сотрудника, и лифты за эти 6 этажей поменяются 4 раза. Тогда лифт, проехавший первым 85-й этаж, первым приедет и на 1-й этаж.

После 90-го этажа первый лифт впереди, он меняется местами со вторым на этажах 86, 87, 88, и на 85-м этаже впереди будет второй лифт.

48. *У фокусника есть две копии «хитрой» клетчатой фигуры. Зритель называет любое целое число N от 2 до 100, и фокусник разрезает первую копию на N клетчатых частей, из которых можно сложить квадрат, а вторую копию – на N клетчатых частей, из которых нельзя сложить квадрат. Приведите пример «хитрой» фигуры и объясните, как разрезать её в каждом из случаев, чтобы фокус удавался. (Все части должны использоваться; наложения частей и дырки не допускаются.)*

Подойдёт прямоугольник 8×32. Разрежем первую копию на два прямоугольника 8×16, а вторую – на два прямоугольника 4×32. Если частей надо больше двух, отрежем ещё от одной половины каждой копии нужное число одиночных клеток, не трогая вторую половину.

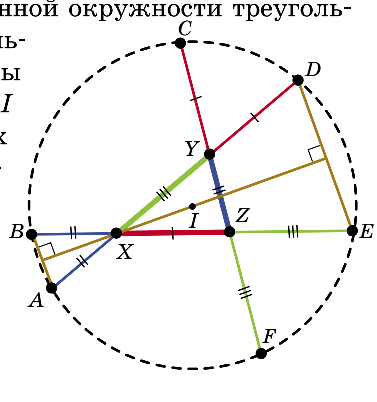
Площадь каждой копии – 256 клеток, а квадрат с такой площадью один – 16×16. Из частей первой копии его легко сложить. А из частей второй копии его не сложишь, ведь одна часть имеет сторону в 32 клетки (что длиннее диагонали квадрата, так как равно сумме двух его сторон).

49. *Каких семизначных натуральных чисел больше: у которых произведение цифр равно 1024 или у которых оно равно 2048?*

Ответ: поровну. Если у семизначного числа N произведение цифр – степень двойки, N состоит из цифр 1, 2, 4, 8. Заменим в N каждую цифру a на цифру $\frac{8}{a}$: то есть 1, 2, 4 и 8 заменим соответственно на 8, 4, 2 и 1. Если произведение цифр у N было 1024, у полученного числа оно будет $\frac{8^7}{1024} = \frac{2^{21}}{2^{10}} = 2^{11} = 2048$. А если у N произведение цифр было 2048, у полученного числа оно будет $\frac{8^7}{2048} = 1024$. Мы сопоставили каждому числу с произведением цифр 1024 своё число с произведением цифр 2048, и наоборот.

50. *Каждую сторону произвольного треугольника продлили в обе стороны так, как показано на рисунке. Докажите, что полученные 6 точек лежат на одной окружности.*

Треугольники AXB и DXE – равнобедренные, а их углы при вершине X – вертикальные. Поэтому биссектрисы их углов при вершине X идут вдоль одной прямой, и эта прямая – серединный перпендикуляр как к AB, так и к DE (в равнобедренном треугольнике биссектриса – это и высота). Тогда расстояние от любой точки этого перпендикуляра до A – такое же, как до B, а до D – такое же, как до E. Аналогично, проведём общие перпендикуляры к CD и FA, а также к EF и BC. Все три перпендикуляра пересекаются в центре I вписанной окружности треугольника XYZ (поскольку это биссектрисы его углов). Так как I лежит на всех трёх серединных перпендикулярах, имеем последовательно: $IA = IB = IC = ID = IE = IF$, то есть I – центр искомой окружности.



РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ («Квантик» № 7, 2020)

1. Да: например, прямоугольный треугольник с углом 30° (рис. 1).

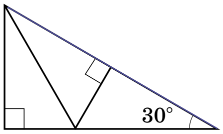


Рис. 1

2. Да. а) Например, прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 (рис. 2, *а*).

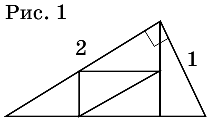


Рис. 2, *а*

б) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 120° при вершине. Его можно разбить на 5 подобных ему треугольников, как показано на рисунке 2, *б*.

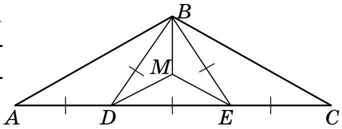


Рис. 2, *б*

3. Возьмём треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Проведём отрезок $B'C'$ так, чтобы $\angle AC'B' = \angle C$ (рис. 3). Тогда треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, причём отрезки $B'C'$ и BC не параллельны.

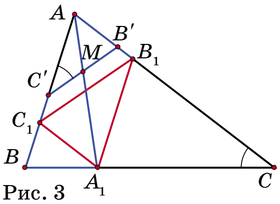


Рис. 3

Отметим середину M отрезка $B'C'$. Найдём точку A_1 пересечения прямых AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Докажите, что отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 дают искомое разрезание.

4. Нет. Назовём треугольник *плохим*, если хоть один из его углов не кратен 20°. На первом шаге оба полученных треугольника – плохие. Но в плохом треугольнике углов, не кратных 20°, хотя бы два. Поэтому при разрезании плохого треугольника по биссектрисе получаются два плохих треугольника. Значит, треугольник, подобный исходному, который плохим не является, ни на каком шаге получить нельзя.

5. Нет. Возьмём подобные прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ с углом 60°. В первом проведём высоту CD из вершины прямого угла C, а во втором – биссектрису $B'E$ из вершины угла, равного 60° (рис. 4). Тогда треугольники CBD и $B'EC'$ подобны, а ACD и $A'B'E$ – нет.

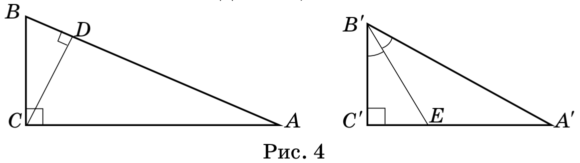


Рис. 4

6. Можно. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметим точку D так, что $\angle ABD = 20°$, а на отрезке BD – точку E так, что $\angle EAD = 40°$ (рис. 5). Тогда треугольники AEB и ADE – равнобедренные с углами при основаниях 20° и 40° соответственно.

Треугольник BDC остроугольный, центр O его описанной окружности лежит внутри него. Вычисляя центральные углы, получаем картинку как на рисунке 5.

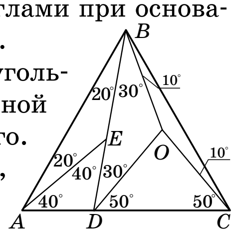


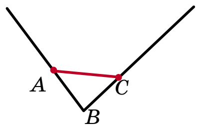
Рис. 5

ПРОЗРАЧНЫЙ БАК? («Квантик» № 7, 2020)

Бак прозрачным не стал: стенки темнеют не от воды внутри, а от воды снаружи. Утром воздух прогревается значительно быстрее, чем вода в баке; и когда бак только наполнили, вода в нём очень холодная по сравнению с воздухом. Вода охлаждает примыкающую к ней часть стенок бака и ближний к ним слой воздуха. В холодный воздух «помещается» меньше водяного пара, чем в тёплый. Лишняя влага из воздуха оседает на стенках – выпадает роса.

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Две точки по разные стороны от излома можно соединить более коротким путём, чем участок ломаной. Мы нашли противоречие с определением: есть участок ломаной, концы которого можно соединить путём покороче.



2. Пусть есть другой, более короткий путь из B в C (красная линия на рисунке). Тогда можно было бы и из A в D пройти короче, используя новый путь. Раз наш путь из A в D кратчайший возможный, то и любая его часть тоже.

3. Надо проверять. Ведь, например, для ломаной линии из упражнения 1 первые два условия выполнены, а третье – нет.

ЧУКОВСКИЙ, БЭКОН, ЧАЙКОВСКИЙ

Выдумана история про Роджера Бэкона: он жил в XIII веке, а картофель появился в Англии только в XVI веке (после открытия Америки).

ПРО ВАРЕНЬЕ

1. Почти все твёрдые тела и жидкости расширяются при нагревании. Воздух тоже расширяется, если есть куда; если некуда – сильнее давит на то, что его окружает. Под струёй горячей воды крышка нагреется, чуть расширится и станет менее плотно «сидеть» на горловине банки. Чуть нагреется и воздух под крышкой: он расширится и тоже поможет – точнее, не будет мешать, деформируя крышку. Это не помогает, если при закрывании варенье попало на резьбу банки и «склеило» её с крышкой.

Ответим на второй вопрос. Варенье наливали в банку горячим. В банке осталось немного воздуха (он от варенья тоже стал горячим) и водяного пара. Остыв, варенье сжалось совсем чуть-чуть, водяной пар сконденсировался и «впитался» в него, а воздух сжаться не может – он должен занять весь оставшийся в банке объём. Зато теперь он давит на крышку гораздо меньше, чем когда её закрывали. Давление снаружи теперь больше, и крышка прогнётся.

2. Пока воздух в банке нагревался, он всё сильнее давил на воду и стенки, от этого банка «подпрыгивала» и наклонялась. К тому же в банке стало полно горячего водяного пара. Временами части воздуха и пара удавалось «вырваться наружу» – большие пузыри опускались в воду и проходили через горловину банки. Так воздух в банке «спускал» избыточное давление: горячего воздуха для поддержания атмосферного давления нужно значительно меньше, чем холодного («горячий воздух легче холодного» – это отсюда). Когда вода и воздух в банке стали остывать, пар сконденсировался обратно в воду, и давление оставшегося разреженного воздуха стало уменьшаться. Воздух внутри банки давит на воду меньше, чем воздух снаружи – вот вода и поднимается, «заползает» в банку! И будет подниматься до тех пор, пока воздух внутри не сожмётся до первоначальной плотности.

3. Плотность варенья больше плотности воды. Плотность косточки – где-то посредине. Так что косточка «тяжелее воды, но легче варенья». Варенье состоит из воды, слив и сахара, плотность всего этого почти равна плотности воды… однако и варенье, и сахарный сироп заметно тяжелее воды. При растворении сахара в воде молекулы того и другого располагаются ближе друг к другу, «упаковываются» плотнее, чем в воде. Жидкий сахар тяжелее, чем вода и чем сахарный песок, а молекулы воды «вклиниваются» между больших молекул сахара, не очень их раздвигая.

4. Почти поровну – молекул воды всего на четверть больше. Формула молекулы сахара $C_{12}H_{22}O_{11}$, из таблицы Менделеева находим, что массы молекул сахара и воды относятся как $342:18$. Отношение числа молекул сахара и воды $(1500:100)/(342:18)=0{,}8$.

ЗАДАЧА О ШИФРОВАЛЬНОЙ МАШИНЕ

Если в ключе 2 цифры, то в двойном ключе от 4 до 6 цифр, а если в ключе 3 цифры, то в двойном – от 6 до 9 цифр. Тогда если в двойном ключе 4 или 5 цифр, в обычном их 2, а если в двойном ключе 7 или больше цифр, в обычном их 3.

Посмотрим на цифру 3 с двойным ключом 3296. Ввиду сказанного выше длина её ключа равна 2, а также длина ключа каждой из цифр её ключа равна 2. Назовём цифры ключа X и Y.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
3	XY	3296
X	32	
Y	96	

Раз ключ X начинается на цифру 3, двойной ключ X начинается на XY. Однако в списке наших цифр и двойных ключей есть только одна цифра, двойной ключ которой начинается на неё саму, и эта цифра – 3. Значит, $X=3$. Тогда $Y=2$.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
3	32	3296
2	96	63270

Посмотрим на цифру 2. Её ключ кончается на 6, а так как двойной ключ у 6 равен 45703 (5 цифр), длина её ключа равна 2. Значит, ключ у 6 равен последним двум цифрам двойного ключа у 2, а ключ у 9 – оставшимся трём.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
6	70	45703
9	632	703296

Теперь проанализируем 7 и 0 в ключе цифры 6: двойной ключ цифры 0 состоит из 7 цифр, а значит, ключ цифры 0 – из трёх! Тогда ключ цифры 0 – последние три цифры двойного ключа цифры 6, а ключ 7– оставшиеся две!

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
7	45	172230
0	703	4570332

Ключ цифры 7 состоит из двух цифр, а двойной ключ – из 6. Значит, длина ключа и у 4, и у 5 равна 3, то есть ключ цифры 4 – это первые три цифры, а ключ цифры 5 – последние три.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
4	172	084596
5	230	9632703

Осталось узнать ключи у 1 и 8. «Отрезая» от конца двойного ключа цифры 4 ключи цифр 2 и 7, имеем, что ключ у 1 равен 08, а убирая ключ цифры 0 из начала двойного ключа цифры 1, получаем, что 296 – ключ цифры 8. Готово!

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
1	08	703296
8	296	9663270