Александр Перепечко

Таблетка от забывчивости

Саша принимает таблетки от забывчивости два раза в день, утром и вечером, но иногда забывает это сделать. Он заведомо примет таблетку, если в два предыдущих раза их принимал, и забудет, если оба раза забывал. Если же за прошедшие сутки он принял ровно одну таблетку, то в следующий раз примет её с вероятностью $\frac{1}{2}$.

С какой вероятностью Саша с какого-то момента совсем забудет принимать таблетки? А с какой – будет принимать постоянно?

Чтобы решить задачу и помочь Саше, мы отправимся в путешествие по разноцветным гирляндам, графам де Брёйна и цепям Маркова.

▼ ГРАФ ДЕ БРЁЙНА

В статье «Разноцветные гирлянды» («Квантик» №12 за 2017 год) мы строили гирлянду из красных и синих флажков, в которой встречаются все наборы из фиксированного числа флажков, например из 3. Эти наборы удобно изображать стрелками. Сначала нарисуем всевозможные двухфлажковые наборы и обведём каждый набор кружком. А потом для каждого трёхфлажкового набора проведём стрелку, ведущую из кружка с первыми двумя флажками набора в кружок с последними двумя флажками набора: например, стрелка ▼▼▼ ведёт из ▼▼ в ▼▼ (рис. 1). Это и будет стрелка, соответствующая трёхфлажковому набору. Будем красить стрелки в тот же цвет, что и последний флажок соответствующего набора. Тогда из каждого набора выходит и в каждый набор входит по одной синей и одной красной стрелке. Такие кар-

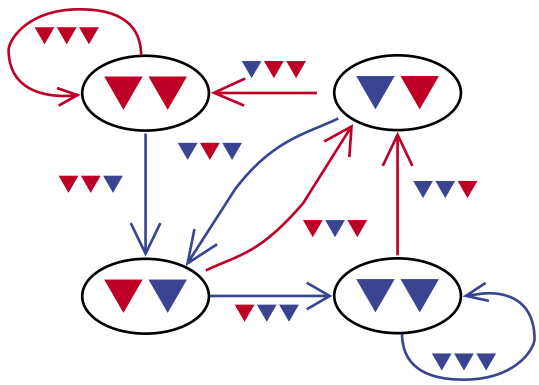

Рис. 1

тинки из кружков и стрелок называются *ориентированными графами*. А если картинка построена по наборам флажков, она называется *графом де Брёйна*.

Маршрут вдоль стрелок, в котором каждая стрелка встречается ровно один раз, как раз даёт минимальную гирлянду, содержащую все наборы, как в статье «Разноцветные гирлянды».

Как же построить такой маршрут? Особенно если цветов больше, или наборы состоят из большего числа флажков? Придёт на помощь правило «только не красный»: начнём с набора из красных флажков, а далее каждый раз, если можем, выходим по стрелке не красного цвета. Оказывается, таким способом мы обойдём все стрелки по одному разу и тем самым построим гирлянду. Это непростая теорема из комбинаторики. Попробуйте сами понять на примерах разных гирлянд, почему так происходит, и смотрите доказательство теоремы в конце статьи.

▼ ЦЕПЬ МАРКОВА

Как всё это связано с задачей про таблетки? Будем отмечать каждый пропущенный приём таблетки красным флажком, а не пропущенный – синим. Тогда последние два флажка полностью описывают текущее состояние, и всего разных состояний – 4 (рис. 2). Стрелки обозначают приписывание нового флажка.

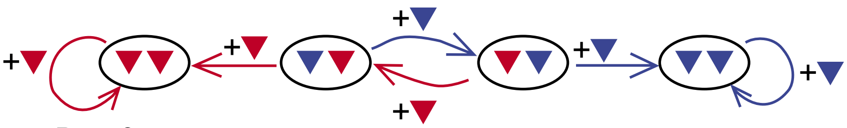

Рис. 2

Из крайних состояний нет выхода, а из средних Саша может переместиться левее или правее с вероятностью $\frac{1}{2}$. Это всё равно что подкидывать монетку с красной и синей сторонами: если выпадает красное, то Саша смещается влево, а если синее – вправо.

Саша начинает в позиции ▼▼ (синий флажок – таблетка, принятая утром у врача, до этого таблетки не принимались). Может ли быть такое, что Саша никогда не попадёт в крайние положения? Это возможно только если Саша будет попеременно выкидывать красное и синее. При каждом броске вероятность этого сокращается вдвое и тем самым стремится к нулю.

Значит, вероятность того, что Саша всегда будет то принимать таблетку, то забывать, равна нулю. Это событие невероятное, но теоретически возможное.

В каких случаях Саша закончит в левом положении, а в каких – в правом? Можно выписать все возможные исходы: скажем, в правое положение приводят последовательности бросков ▼, ▼▼▼, ▼▼▼▼▼ и т.д. Их бесконечное количество, и придётся суммировать бесконечный ряд вероятностей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$ и т. д. С этим можно справиться, например как в статье Г. Мерзона «$\frac{1}{3}$, или Две невозможные задачи с решениями» («Квантик» №6 за 2019 год).

А можно посмотреть на вероятности иначе: предпишем каждому текущему состоянию вероятность попасть из него в крайнее правое состояние, то есть вероятность успеха в лечении. Эта вероятность никак не зависит от того, каким путём мы попали в текущее состояние. Тогда в крайнем правом состоянии будет вероятность 1, а в крайнем левом – 0. Докажем, что вероятность в промежуточном состоянии равна полусумме вероятностей в соседних. Пусть для состояния слева вероятность успеха равна a, а справа – b. Равновероятно мы идём влево или вправо, то есть достигаем успеха с вероятностью $\frac{1}{2}\cdot a$ (идём влево) плюс $\frac{1}{2}\cdot b$ (идём вправо). Это как раз полусумма a и b.

Нетрудно проверить, что тогда разность вероятностей для каждой пары соседних состояний будет одна и та же (получается арифметическая прогрессия), и поскольку разностей 3, все они равны $\frac{1}{3}$. Так что вероятности попасть в крайнее правое положение равны 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 соответственно. Итак, Саша с вероятностью $\frac{2}{3}$ станет постоянно принимать таблетки, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ – перестанет их принимать.

Решим этим методом известную задачу о пьянице.

Задача о пьянице. Пьяница стоит на дороге между кабаком и своим домом и каждую секунду делает шаг в 1 м по дороге в случайном направлении с равной вероятностью. Если попадает домой или в кабак – остаётся там. Спрашивается, с какой вероятностью он придёт домой, если до дома – 3 м, а до кабака – 7 м?

В этой задаче 11 состояний (рис. 3), вероятности крайних – 0 и 1, вероятность сдвига вправо (домой) – $\frac{1}{2}$. Опять же, вероятности промежуточных состояний образуют арифметическую прогрессию, и ответ: $\frac{7}{10}$.

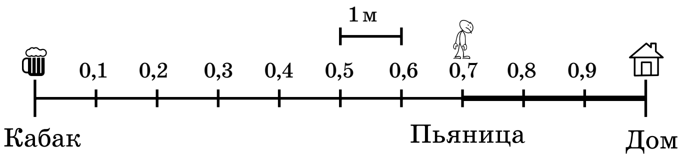

Рис. 3

А вот похожая задача про Сашу:

Задача «утро-день-вечер». С какой вероятностью Саша успешно излечится, если он вспоминает о приёме таблетки с вероятностью $k/3$, где k – количество принятых таблеток в последние 3 приёма?

Попробуйте решить её самостоятельно.

Задачи, где есть набор состояний и вероятности перехода между ними, описываются так называемыми *цепями Маркова*. Но это уже совсем другая история.

Приложение

▼ ОБХОД ГРАФА ДЕ БРЁЙНА

Вернёмся к графам де Брёйна. Как же нам обойти все стрелки?

Граф де Брёйна обладает двумя свойствами: во-первых, в нём из любой вершины можно дойти по стрелкам до любой другой (то есть он *связен*), а во-вторых, в каждую вершину (так называются наши кружки) входит столько же стрелок, сколько и выходит. Такие графы обладают удивительным свойством: можно, начав в любой вершине, пройти по каждой стрелке один раз и вернуться в исходную вершину. Такой обход называется *эйлеровым циклом*, а такой граф называется *эйлеровым* (см. также статью «Почтовое занятие», «Квантик» №6 за 2020 год).

Начнём из «красной» вершины (соответствующей набору красных флажков) и будем бродить по стрелкам, не проходя одну стрелку дважды и соблюдая правило «только не красный»: мы выходим из вершины по «красной» стрелке (соответствующей приписыванию красного флажка), только если других исходящих стрелок не осталось.

Каждый раз, входя в вершину, мы уменьшаем количество непройденных входящих стрелок, а выходя – исходящих. То есть во всех вершинах сохраняется равенство входящих и исходящих стрелок, кроме исходной – в ней

на одну входящую больше, и текущей – в ней больше на одну исходящую. Значит, закончим мы обязательно в исходной вершине, то есть получим цикл.

Почему же этот цикл эйлеров? Заметим два свойства:

1. Если по этому циклу мы вышли из какой-то вершины по «красной» стрелке, то мы уже прошли по всем стрелкам, входящим и исходящим из этой вершины. Действительно, если мы вышли по «красной» стрелке, то мы уже перебрали все остальные, а также вошли столько же раз, сколько и вышли.

2. По «красным» стрелкам можно дойти от любой вершины до «красной» вершины.

Предположим, что по каким-то стрелкам мы не прошли. Из всех вершин, в которые входят непройденные стрелки, выберем такую, из которой путь по «красным» стрелкам к «красной» вершине самый короткий. Тогда исходящая «красная» стрелка должна лежать в цикле (иначе найдётся путь короче), но это противоречит первому из замеченных свойств. Значит, цикл действительно эйлеров!

По эйлерову циклу графа де Брёйна уже легко построить гирлянду: берём флажки, соответствующие одной из вершин, а потом из этой вершины обходим эйлеров цикл, с каждой стрелкой добавляя новый флажок. Более того, первые флажки, соответствующие исходной вершине, совпадут с последними, и, склеив их, мы можем «сшить» гирлянду в кольцо. Тогда каждый флажок будет в точности соответствовать одной стрелке. Это кольцо можно разорвать в любом месте, продублировав флажки в месте разрыва, и получить новую гирлянду.

Вообще говоря, любой связный граф, в котором в каждую вершину входит столько же стрелок, сколько и выходит, обладает эйлеровым циклом. Как мы уже увидели, если мы начнём бродить из произвольной вершины по стрелкам без повторений, мы получим какой-то цикл. Но если убрать все стрелки этого цикла, то в новом графе по-прежнему будет равенство входящих и исходящих стрелок в каждой вершине. Значит, мы можем снова и снова так ходить и удалять циклы, пока не исчерпаем все стрелки, и разобьём исходный граф в объединение циклов. Здесь нам даже не нужна связность графа.

А вот чтобы склеить все циклы в один, связность понадобится. Благодаря ей, мы можем найти два цикла, проходящие через одну вершину, и склеить их, пройдя из этой вершины сначала по одному циклу, а потом по второму. Рано или поздно останется один цикл – эйлеров.

Художник Мария Усеинова