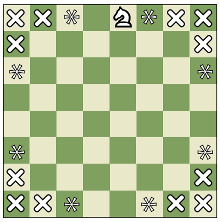
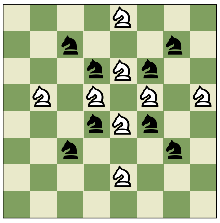
## НАШ КОНКУРС, XI тур («Квантик» № 7, 2020)

**51.** *В числовом ребусе Т×О×П×О×Л×Ь = =Т×Ю×Л×Ь×П×А×Н замените буквы ненулевыми цифрами так, чтобы число ТОПОЛЬ получилось как можно бо́льшим. (Одинаковые буквы заменяйте одинаковыми цифрами, разные – разными.) Не забудьте обосновать ответ.*

**Ответ:** 947465. Чтобы число было максимальным, возьмём Т = 9. Так как Т×П×Л×Ь не равно нулю, то О×О= Ю×А×Н. Поскольку Ю, А, Н отличны от О, цифра О должна быть составной. При О = 8 подходящих цифр Ю, А, Н нет, а при О = 6 цифры Ю, А, Н равны 1, 4, 9 в некотором порядке. Значит, О = 4, и цифры Ю, А, Н равны 1, 2, 8 в некотором порядке. Тогда наибольшее возможное число ТОПОЛЬ равно 947465, а ТЮЛЬПАН можно взять равным, скажем, 9865721.

**52.** *Расставьте на шахматной доске несколько белых и чёрных коней так, чтобы каждый белый конь бил ровно четырёх чёрных, а каждый чёрный – ровно четырёх белых.*

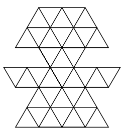




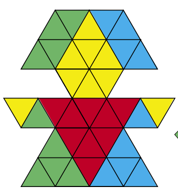
В клетках, отмеченных крестиком, не может стоять конь, так как иначе он бьёт менее 4 клеток. Тогда в клетках, отмеченных звёздочкой, не может стоять конь, так как иначе он бьёт 4 клетки, одна из которых пустая (отмечена крестиком). Поставим белого коня так, как на рисунке сверху. Далее картинка полностью восстанавливается (рисунок справа). Всего получается 8 белых и 8 чёрных коней.

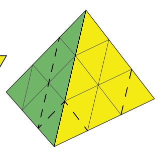
Дополнительный вопрос: на квадратной доске какого наименьшего размера можно расставить коней, как требуется в условии, и сколько при этом есть вариантов расстановки?

**53.** *Аня вырезала куклу из бумаги в треугольную сетку. Юра утверждает, что эту фигурку можно свернуть в треугольную пирамидку без просветов и наложений. Прав ли он?*

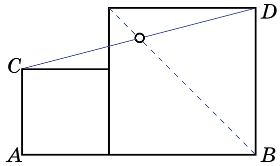


**Ответ:** да. На рисунке разными цветами обозначены разные грани треугольной пирамидки, которые получатся при сворачивании.

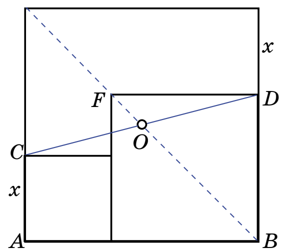




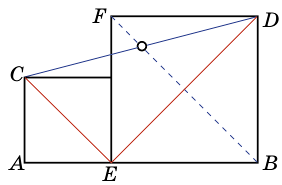
**54.** *На отрезке AB построены два различных прилегающих друг к другу квадрата (см. рисунок). Докажите, что диагональ большого квадрата делит отрезок CD пополам.*




*Первое решение.* Достроим рисунок до большого квадрата со стороной $AB$. Точки $C$ и $D$ симметричны относительно центра $O$ построенного квадрата. Значит, $O$ – середина $CD$. Углы $OBA$ и $EBA$ равны 45°. Поэтому диагональ $BF$ тоже проходит через $O$, то есть, через середину $CD$.



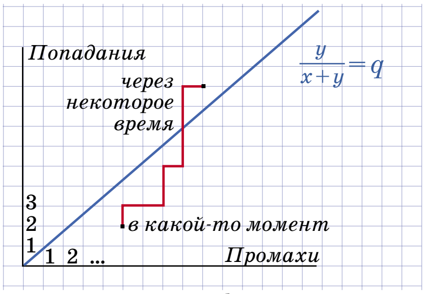

*Второе решение.* Диагональ $BF$ делит $DE$ пополам и параллельна $CE$. Значит, $BF$ пересекает треугольник $CDE$ по его средней линии и делит $CD$ также пополам.




**55.** *Петя стреляет по мишени. Табло показывает отношение числа попаданий к числу сделанных выстрелов (до начала стрельбы табло не горит). В какой-то момент число на табло было меньше чем $q$. Через некоторое время это число стало больше, чем $q$. Для каких $q$ от 0 до 1 отсюда следует, что в какой-то момент доля попаданий была ровно $q$?*

**Ответ:** подходит любое $q$ вида $\frac{k}{k+1}$, где $k$ – натуральное число.

Нарисуем на клетчатой плоскости две координатные оси и будем отмечать промахи по оси $Ox$, а попадания – по оси $Oy$. Изначально у Пети нет ни промахов, ни попаданий, то есть он «находится» в узле (0;0). При промахе он смещается на клетку вправо, а при попадании – на клетку вверх. Если Петя сдвигается в узел ($x$; $y$), число на табло будет равно $\frac{y}{x+y}$. Узлы, для которых доля попаданий равна $q$, лежат на прямой (синяя на рисунке), заданной уравнением $\frac{y}{x+y} = q$. Для узлов под прямой число на табло меньше $q$, а над прямой – больше. По условию, Петя когда-то был под прямой, а потом оказался над ней (пример – красная линия на рисунке), и только из этого можно утверждать, что доля в какой-то момент равнялась $q$. Это значит, что при движении по любому такому красному пути (ведущему из узла под прямой в узел над прямой), точка при каком-то сдвиге попадает в узел на синей прямой. Это возможно, только если синяя прямая пересекает все вертикальные линии сетки (прямые вида $x=n$, где $n$ – целое) в узлах. Возьмём две соседние прямые $x=n$ и $x=n+1$. Они пересекают синюю прямую в узлах, и правый узел выше левого на целое число, пусть $k$. Тогда синяя прямая задаётся уравнением $y=kx$. Подставляя в исходное уравнение $\frac{y}{x+y}=q$, получаем $q=\frac{kx}{kx+x}=$ $=\frac{k}{k+1}$, то есть $q$ обязательно имеет такой вид.




Ясно, что любое $q$ вида $\frac{k}{k+1}$ подходит: ведь синяя прямая по-прежнему пересекает все вертикальные линии сетки в узлах, а мы должны её пересечь ходом вверх, то есть вдоль вертикальной линии, и попадём при этом в синий узел.

## КОМБИНАЦИИ КВАДРАТОВ
**(«Квантик» № 8, 2020)**

**9.** Примените утверждение задачи 6.

**10.** Снова примените утверждение задачи 6.

**11.** Применив утверждение задачи 4 к одной паре квадратов и к другой, получим два равнобедренных прямоугольных треугольника с общей гипотенузой (рис. 1).

**12.** Рассмотрите зелёные квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис. 2).

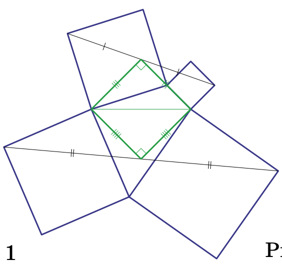


Рис. 1

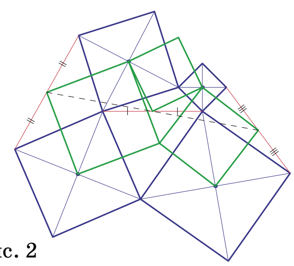


Рис. 2

**13.** Рассмотрите зелёные квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис. 3).

**14.** Рассмотрите зелёные квадраты (рис. 4).

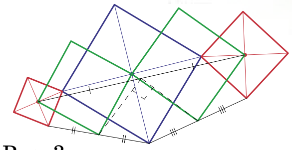


Рис. 3

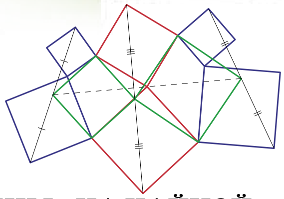


Рис. 4

## «ДОМИКИ И КОЛОДЦЫ» НА ЧАЙНОЙ КРУЖКЕ (**«Квантик» № 8, 2020**)

На листе бумаге соединим как можно больше домиков и колодцев (рис. 1). Лист разделится тропинками на области, и останется только одна пара из домика и колодца, которые не соединены. Для этого домика и этого колодца выберем по области, на границе которой они лежат. Перенесём рисунок на боковую поверхность кружки так, чтобы ручка крепилась к выбранным областям (рис. 2). Оставшуюся тропинку проведём по ручке.

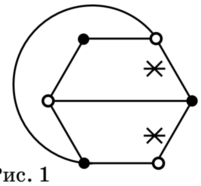


Рис. 1

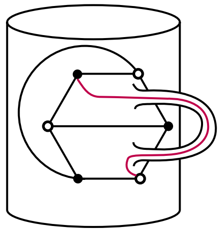


Рис. 2

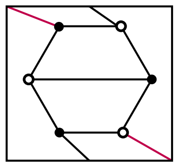


Рис. 3

На с. 21–22 в статье «Как Бусенька рисовала $K_{3,3}$» («Квантик» № 8, 2020) показано, как соединить домики и колодцы на квадрате, если разрешается тропинку прерывать на стороне квадрата и продолжать на противоположной стороне, но так, чтобы отрезок, соединяющий точки разрыва, был параллелен другой паре сторон (рис. 3). Если линия зашла в вершину квадрата, то продолжить её можно из любой вершины. На самом деле это та же задача!

Действительно, возьмём эластичный квадрат, который можно как угодно растягивать и сжимать, но нельзя рвать. Покажем, что можно обернуть в один слой этим квадратом кружку так, что любая линия, нарисованная на квадрате по указанным выше правилам, перейдёт в непрерывную линию на кружке. (Это означает, например, что противоположные стороны квадрата наложатся друг на друга, а углы квадрата попадут в одну точку на кружке.)

Для этого сначала положим кружку в квадрат, как в мешок (рис. 4), чтобы тор-

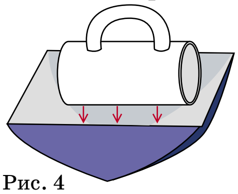


Рис. 4

чала ручка, прижмём квадрат к кружке и разгладим (рис. 5). Притянем друг к другу две противоположные стороны квадрата (рис. 6), две другие стороны при этом станут петлями вокруг стыков ручки с кружкой. Эти две петли притянем друг к другу вдоль ручки, так чтобы четыре угла квадрата совместились (рис. 7).

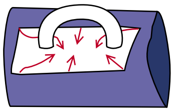


Рис. 5

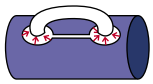


Рис. 6

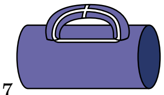
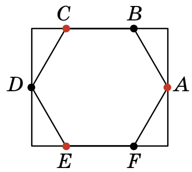


Рис. 7

## ПЫЛЕСОС И КОРОТКИЙ ШНУР

**(«Квантик» № 8, 2020)**

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 3 метра и дополним его до прямоугольника, продолжив две противоположные стороны шестиугольника, как на рисунке.

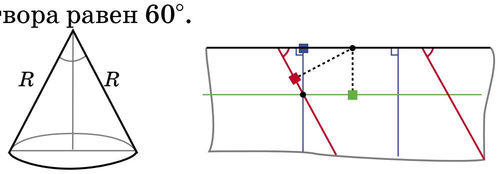



Если в полученной прямоугольной комнате розетки находятся в точках $A$, $C$ и $E$, то всю комнату удастся пропылесосить, а её площадь будет $3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 > 30$ м².

## ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

**2.** а) По полуокружности с центром в будущей вершине конуса: ведь все точки основания готового конуса находятся на одинаковом расстоянии от его вершины.

б) Длина полуокружности радиуса $R$ на развёртке равна длине целой окружности – основания конуса ($\pi R = 2\pi r$); значит, $R = 2r$, и угол раствора равен 60°.




**5.** Ближайшая к вершине точка – та, в которой направление на вершину перпендикулярно геодезической. На развёртке тоже нужно опустить из центра конуса перпендикуляр на геодезическую.

**7.** Ещё подсказка: вспомните про «переклейку» конуса. Как бы тут, в цилиндре, сделать что-нибудь похожее?

## ТЕНИ НА ПУПЫРЧАТОЙ СТЕНЕ

Обычно, если свет падает под большим углом к какой-нибудь незеркальной поверхности, он рассеивается во все стороны. Однако, если свет падает под маленьким углом, значительная часть света отражается, как от зеркала, а меньшая часть – рассеивается во все стороны (сравните фотографии 1 и 2).


Фото 1


Фото 2

Светлые области шероховатой стены освещены сверху лампой, и поэтому значительная часть света отражается вдоль поверхности вниз (рис. 3, справа). Так что в отражении от горизонтальной металлической поверхности они ярче. По сути, мы видим блик от лампы.

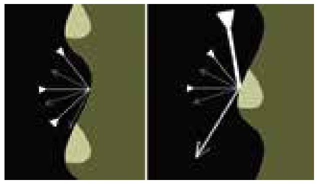
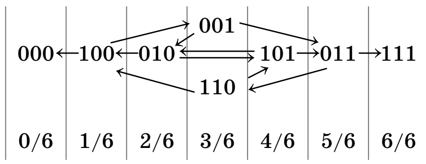


Рис. 3

Тёмные же области освещены отражённым светом равномерно со всех сторон (рис. 3, слева). Поэтому в отражении они могут быть лишь темнее, ведь металл часть лучей поглощает.

## ТАБЛЕТКА ОТ ЗАБЫВЧИВОСТИ

Удивительно, но граф состояний в задаче «утро-день-вечер» (см. рисунок) можно уложить на дорожку длиной в 6 шагов, при этом состояния 001 и 110 (когда Саша принял таблетку только в последний раз, и когда Саша принял таблетку все разы, кроме последнего) окажутся вместе. Из каждого состояния можно пойти в одну сторону на один шаг с вероятностью 1/3 или на два шага в противоположную сторону с вероятностью 2/3. Поэтому вероятности успеха вновь образуют арифметическую прогрессию. Значит, при исходном положении 001 вероятность успеха – 1/2.




## ВАЛЮТНЫЕ МАХИНАЦИИ

**Первая задача.** Задача только кажется сложной – на самом деле всё намного проще. Если свет не сошёлся клином на целых числах, то почему мы ограничились *десятичными* дробями? Ведь $n$ может быть и *простой дробью*, что, кстати, вполне естественно, потому что из ребуса следует, что $n = \frac{\text{ДОЛЛАР}}{\text{РУБЛЬ}}$. Осталось лишь определить, при каких значениях входящих в эту дробь букв её величина наименьшая, а при каких – наибольшая. Решение несколько затрудняется наличием некоторых одинаковых букв (а именно, **Л** и **Р**) в числителе и знаменателе. Тем не менее, правильный ответ нетрудно «нащупать», а потом уже и доказать. Итак:

1) Наименьшее значение $n$ составляет $n_{\min} = \frac{102239}{98726} = 1{,}035583\ldots$ Убедимся, что меньшей величины достичь невозможно.

В самом деле, при любых значениях букв знаменатель дроби не больше 98765. Если **Д** $> 1$ (то есть **Д** $\geqslant 2$), то числитель не меньше 201134, и тогда $n \geqslant \frac{201134}{98765} = 2{,}03\ldots > n_{\min}$ . Поэтому однозначно **Д** $= 1$.

Далее, если **О** $> 0$ (то есть **О** $\geqslant 2$ – с учетом того, что цифра 1 уже «занята»), то числитель не меньше 120034, и тогда $n \geqslant \frac{120034}{98765} = 1{,}21\ldots > n_{\min}$. Поэтому **О** $= 0$.

Продолжаем в том же духе. Если **Л** $> 2$ (то есть **Л** $\geqslant 3$), то числитель не меньше 103324, и тогда $n \geqslant \frac{103324}{98765} = 1{,}04\ldots > n_{\min}$. Поэтому **Л** $= 2$.

Здесь придётся притормозить и сначала определиться со значением буквы **Р**. Если Р $< 9$ (то есть **Р** $\leqslant 8$), то знаменатель не больше 89765, тогда как числитель (при уже известных **Д**, **О** и **Л**) не меньше 102234, и потому $n \geqslant \frac{102234}{89765} = 1{,}13\ldots > n_{\min}$. Поэтому **Р** $= 9$.

Что ж, удалось разобраться со значениями «повторяющихся» букв **Л** и **Р**, которые присутствуют и в числителе, и в знаменателе. С остальными же, ещё не рассмотренными буквами **А**, **У**, **Б** и **Ь**, которые находятся либо в числителе, либо в знаменателе, всё совершенно очевидно: для буквы **А**, которая стоит в числителе, надо брать наименьшее неиспользованное значение, то есть **А** $= 3$, а для букв **У**, **Б** и **Ь** – наоборот, наибольшие, причём в порядке убывания (с учётом занимаемых ими разрядов). Поэтому **У** $= 8$, **Б** $= 7$ и **Ь** $= 6$, так что, как уже отмечалось, наименьшее значение $n_{\min} = \frac{102239}{98726} = 1{,}035583\ldots$

2) Наибольшее значение $n$ определяется аналогично, только все рассуждения надо выполнять «с обратным знаком». Поэтому $n_{\max} = \frac{987761}{10273} = 96{,}151172\ldots$ Вот и всё.

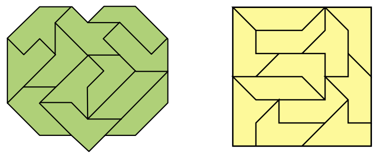
Итак, согласно неоспоримой математической теореме А. В. Жукова, в обозримом будущем следует ожидать соотношения доллара к рублю в пределах от $1{,}035583\ldots$ до $96{,}151172\ldots$

**Вторая задача.** После успешного решения первой задачи становится совершенно ясно, какое отношение к ней имеет вторая задача. А именно, решение первой задачи есть *подсказка* к решению второй. Можно долго и безуспешно искать подходящую десятичную дробь, в то время как решение лежит буквально на поверхности. Для этого надо всего лишь обратиться к *простым дробям*, и ответом будет «наипростейшая» из них: $\frac{1}{2}$. Она и впрямь ровно в 6 раз меньше суммы своих цифр, равной $1 + 2 = 3$.

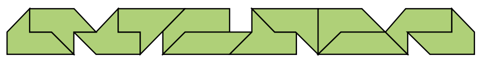
Известны и другие ответы, но в них используются только *сократимые* дроби (скажем, $\frac{10}{20}$ или $\frac{3}{3}$ ). Они, конечно, не приносят радости.

## КВАДРАТУРА ЯБЛОКА

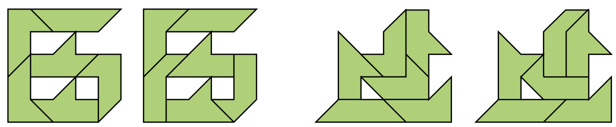
**1.** См. рисунок. Известно несколько вариантов сборки квадрата.



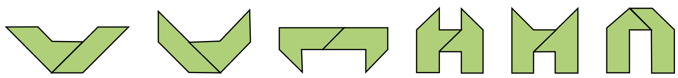
**2.** Известно единственное решение:



**3.** Решений много, вот две пары из них:



**4.** Вот единственное решение (если не считать, что пара элементов 11–12 позволяет составить два варианта симметричных фигур):



1–5 2–3 4–6 7–8 9–10 11–12

**5.** Площадь пустоты на рисунке составляет 174 единицы. Это рекордный на сегодняшний момент «ананас»: