Математические сюрпризы

Хайдар Нурлигареев

Мозаика Робинсона

Художник Алексей Вайнер

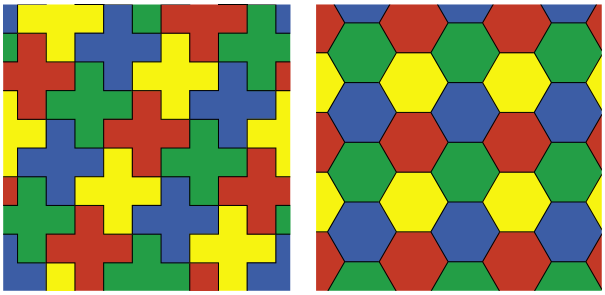

Рис. 1

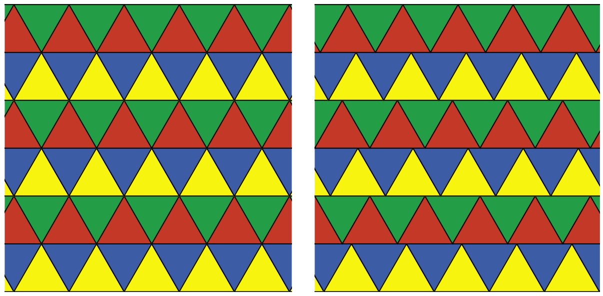

Рис. 2

Пусть имеется конечный набор многоугольников и есть возможность изготовить сколько угодно копий каждого из них. Цель – замостить всю плоскость, используя лишь такие копии (будем называть их *плитками*). Бывает, что замощение получается только периодическое. Например, если в наборе лишь один правильный шестиугольник, или же лишь одна фигурка крест-пентамино (рис. 1). А иногда можно замостить и периодически, и непериодически. Скажем, если в наборе только квадрат или только правильный треугольник (рис. 2).

Кстати, а что такое «периодическое» замощение? Первое, что приходит в голову, – это замощение можно сдвинуть на какое-то расстояние в каком-то направлении, и оно идеально наложится само на себя. Но тогда и правое замощение на рисунке 2 периодическое. Мы же имеем в виду картинки, похожие на рисунок 1. Поэтому правильное определение такое: замощение *периодическое*, если можно сделать два каких-то сдвига в непараллельных направлениях так, что замощение совместится само с собой.

Удивительнее всего, что бывают наборы фигур, копиями которых можно замостить плоскость только непериодически. До середины XX века считалось, что их не существует, пока в 1966 году Роберт Бергер не сконструировал первый такой набор, состоящий аж из 20 426 различных плиток. Немного позже сам же Бергер уменьшил число различных многоугольников до 104, а в течение следующего десятилетия усилиями ряда учёных удалось понизить его до 2 – искомый пример доставляют знаменитые мозаики Пенроуза. Существует ли набор из единственного многоугольника, копиями которого можно замостить плоскость лишь непериодически, неизвестно до сих пор.

Мы расскажем о таком наборе из 6 многоугольников, который предложил Рафаэль Робинсон в 1971 году (рис. 3). Выступы и пазы на этих плитках организованы так, чтобы рисунок на прикладываемых друг к другу

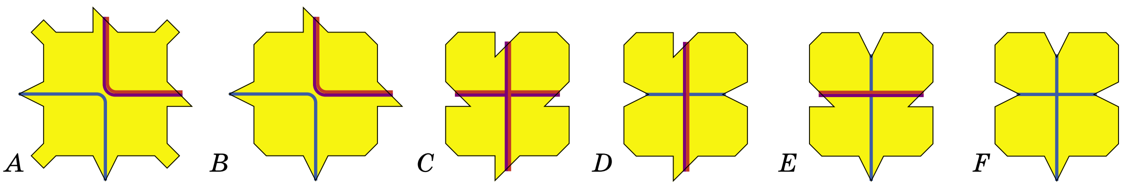

Рис. 3

плитках был согласован: синие линии на одной плитке продолжаются на соседних плитках синими линиями, а красные с фиолетовым краем – красными с фиолетовым краем (причём фиолетовые края стыкуются). Кроме того, плитка *A* отличается от остальных плиток формой углов: у неё это квадратные выступы, тогда как углы остальных плиток обрезаны.

Мы наметим доказательство, почему такими плитками можно замостить плоскость, но только непериодически. Часто, чтобы убедиться в справедливости очередного утверждения, надо будет перебрать несколько вариантов – будьте к этому готовы.

Пусть мы замостили плоскость, используя лишь копии этих 6 плиток (будем обозначать их соответствующими буквами, как на рисунке 3). Хоть одна плитка *A* обязательно встретится в замощении (почему? – обратите внимание на выступы по углам); для определённости будем считать, что красные выступы этой плитки *A* торчат вправо и вверх. Ясно, что среди её соседей нет плитки *A* (рис. 4). Что стоит на месте вопросительных знаков? Если и там, и там не плитка *A*, то правый сосед у верхнего знака вопроса и верхний сосед у правого знака вопроса – две плитки *A*, и они перекрываются (убедитесь в этом). Значит, один из знаков вопроса – плитка *A*.

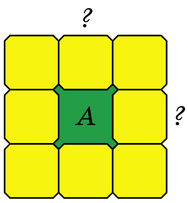

Рис. 4

Будем считать, что *A* – клетка справа от исходной. Тогда клетка между ними – *C* или *E*, а красные выступы второй клетки *A* торчат влево и вверх (рис. 5). В любом случае у плитки посередине на верхней стороне есть паз.

Заметим, что выступы плиток, стоящих над нашими двумя плитками *A*, не могут смотреть «друг на друга», то есть в сторону плитки между ними. Значит, между ними может находиться только плитка *B* (рис. 6). Но плитки *A* и *B* не могут стоять рядом. Следовательно, над плиткой *B* стоит не *A*. В двух ещё не заполненных углах квадрата 3×3 стоят плитки *A*, потому что к уголку из трёх плиток «не *A*» должна примыкать плитка *A*. Нетрудно понять, что красные выступы четырёх плиток *A* смотрят друг на друга. У нас есть возможность выбрать одну из четырёх ориентаций плитки *B*, но как только мы её зафиксируем, оставши-

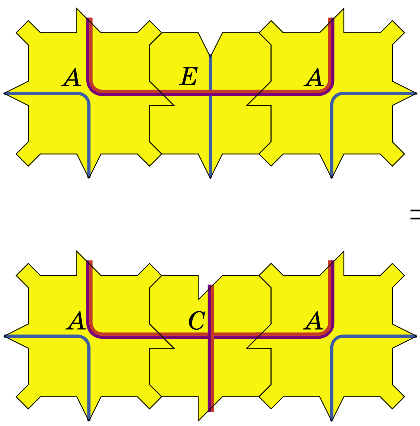

Рис. 5

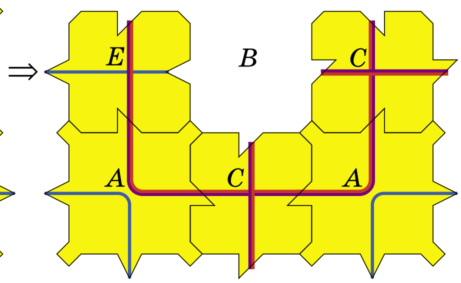

Рис. 6

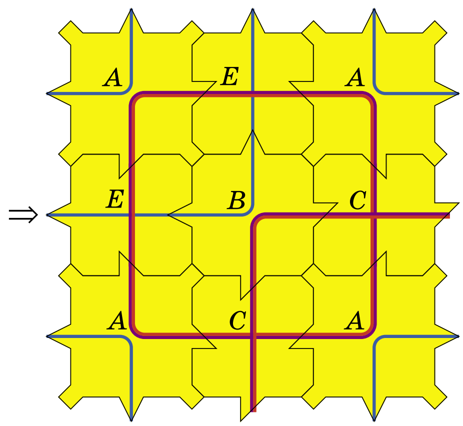

Рис. 7

еся четыре позиции квадрата 3×3 заполняются однозначно (рис. 7).

Оказывается, сконструированные подобным образом квадраты 3×3 – так называемые *макроплитки* – ведут себя точно так же, как и плитки A. Именно, единственная возможность соединить их между собой – расположить их по углам квадрата 7×7; выходящие при этом из середин сторон макроплиток красные линии должны смотреть друг на друга. Снова по центру должна располагаться плитка B, а зафиксировав одну из четырёх её ориентаций, мы однозначно заполняем оставшиеся промежутки и получаем супермакроплитку (рис. 8).

Можно доказать, что этот процесс укрупнения продолжается и дальше. Так возникает иерархия квадратов размера 1×1, 3×3, 7×7, 15×15, 31×31, … , $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, … , каждый из которых наделён узором: какие-то две из выходящих по центру его сторон линии – красные, две другие – синие. Когда мы объединяем макроплитки в супермакроплитки, красные линии сливаются в квадрат, благодаря чему образуется иерархия красных квадратов размера 2×2, 4×4, 8×8, 16×16, 32×32, ..., $2^n \times 2^n$, ... соответственно. Эти красные квадраты объясняют удивительные свойства замощений плитками Робинсона.

Например, любое замощение плоскости плитками Робинсона – непериодическое. Иначе можно было бы переместить все плитки замощения на одинаковое расстояние так, что мы бы не увидели разницы. В частности, красные квадраты должны были бы перейти в такие же красные квадраты. Но так как в любом замощении плитками Робинсона найдутся сколь угодно большие красные квадраты, а квадраты одного размера не пересекаются между собой, это невозможно. Ведь на какое бы конечное расстояние мы ни сдвинулись, найдётся настолько большой квадрат, что за его пределы мы не выйдем. А значит, этот квадрат наложится сам на себя.

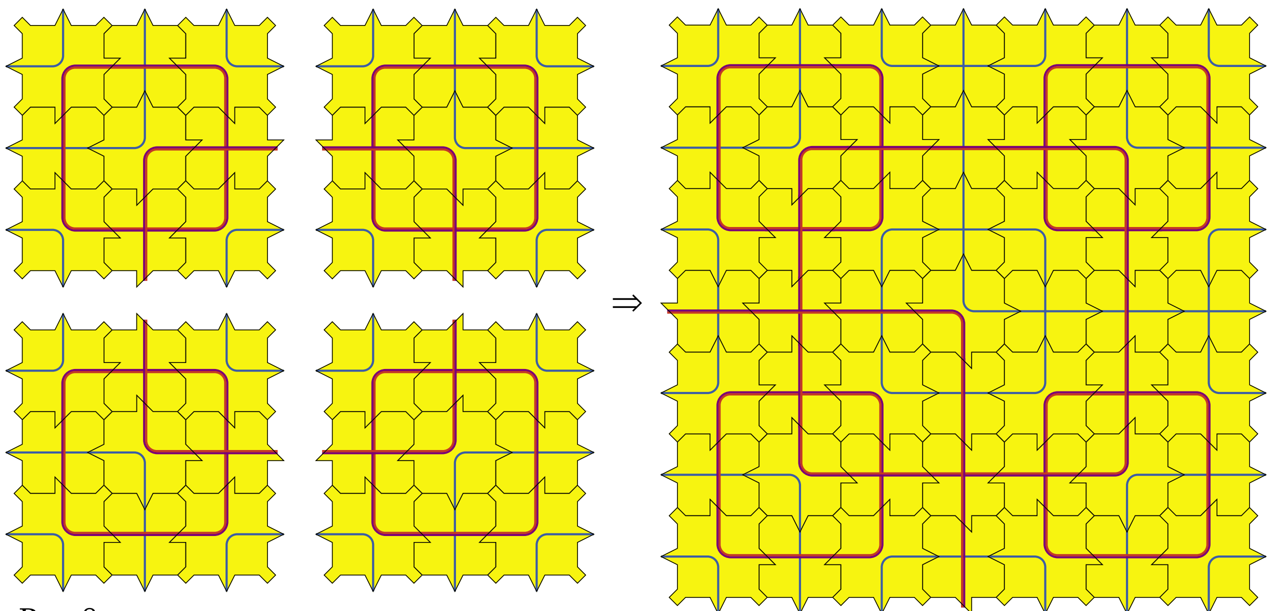

Рис. 8

А как тогда устроены замощения плитками Робинсона и почему они вообще существуют? Чтобы понять это, поглядим более внимательно на процесс укрупнения, благодаря которому удаётся перейти от отдельных плиток к замощению всей плоскости в целом. Рассмотрим какую-нибудь плитку *A*. Она входит в макроплитку размера 3×3 в одном из четырёх положений, которые мы обозначим цифрами 1, 2, 3 и 4 (рис. 9). Аналогично, макроплитка входит в супермакроплитку в одном из четырёх положений, и т. д. Таким образом, если нам дано некоторое замощение плоскости, то каждой плитке мы можем сопоставить бесконечную последовательность из цифр 1, 2, 3 и 4. Например, пусть дано замощение, изображённое на рисунке 10, и мы стартуем с зелёной плитки. Тогда первый элемент последовательности равен 3, поскольку зелёная плитка входит в оранжевую макроплитку в третьем положении. Затем, второй элемент – 1, так как оранжевая макроплитка входит в бежевую супермакроплитку в первом положении. Аналогично, третий элемент – 2, четвёртый – 4, и т. д. То есть зелёной плитке сопоставляется последовательность 3124...

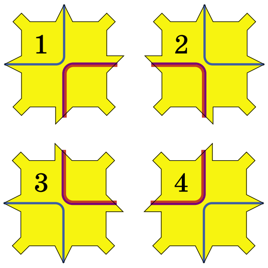

Рис. 9

Верно и обратное, то есть любой последовательности из цифр 1, 2, 3 и 4 мы можем сопоставить некоторое замощение. Правда, некоторым последовательностям будет соответствовать замощение не всей плоскости, а только её

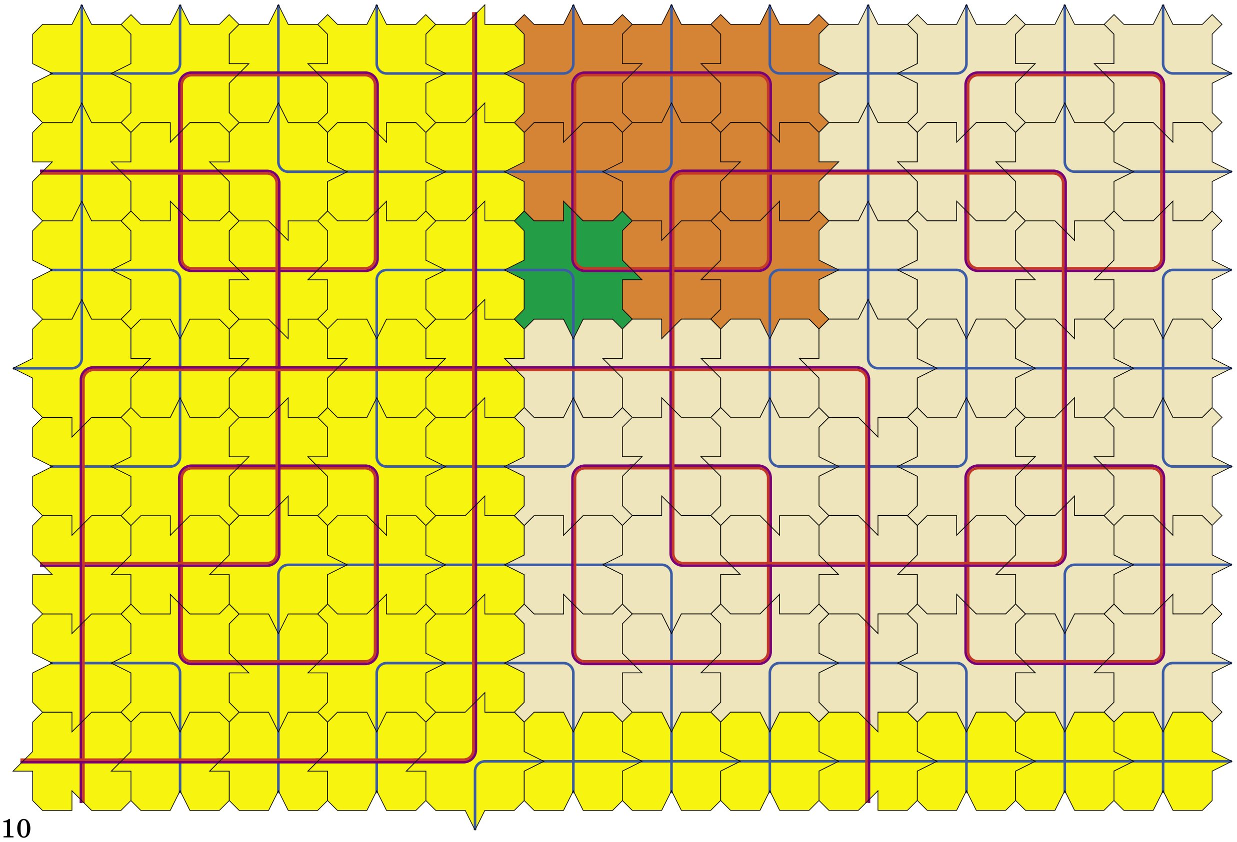
Рис. 10

части. Например, если мы возьмём последовательность 222222..., то получим замощение четверти плоскости, а если 131313... – то полуплоскости. Подобные куски можно «склеить» между собой, так что возникнет замощение всей плоскости с исключительными линиями – прямыми или лучами (рис. 11).

Но замощения, в которых есть исключительные полосы, – редкость, их доля исчезающе мала. Ведь наличие исключительной полосы означает, что в последовательность, соответствующую какой-либо плитке такого замощения, с какого-то момента входит не больше двух чисел из четырёх. Такого почти не бывает: это как если бы мы подбрасывали «честную» монетку, и вдруг с какого-то момента всегда стала выпадать решка. Так что подавляющее большинство замощений плитками Робинсона выглядят примерно как на рисунке 10.

Ещё из интересных свойств: в замощениях плитками Робинсона любой «типичный» фрагмент встречается бесконечно много раз: чтобы убедиться в этом, достаточно найти красный квадрат, содержащий этот фрагмент. Раз квадратов одного и того же размера бесконечно много, то и фрагментов заданного вида внутри них – тоже.

В замощениях, как на рисунке 11, есть фрагменты (бежевые), не содержащиеся ни в одном из красных квадратов, – они примыкают к исключительным линиям или пересекают их. Несмотря на это, они всё равно встречаются в замощении бесконечно много раз. Правда, часть из них можно найти только при движении вдоль исключительной полосы.

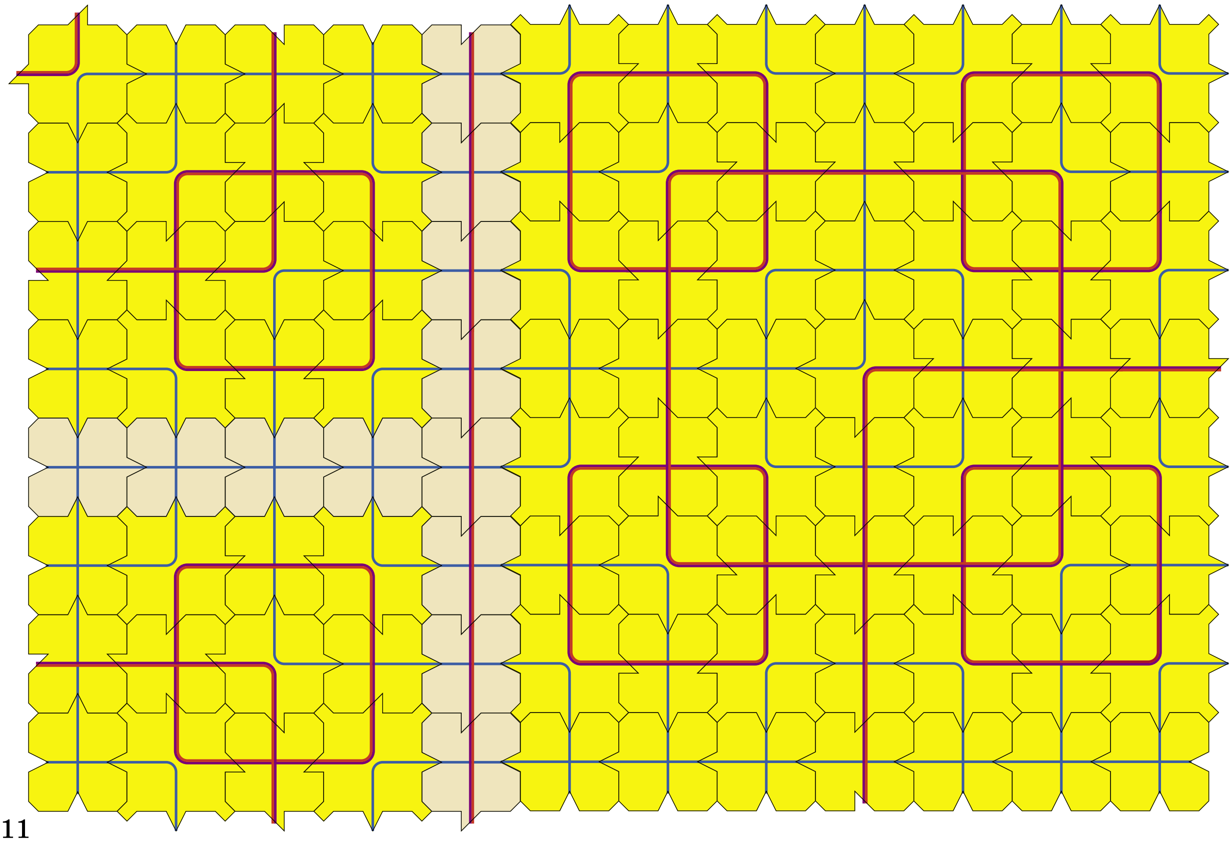

Рис. 11