

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, или ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Окончание. Начало в «Квантике» № 8 и № 9, 2020

В прошлом номере мы разобрались, как выглядят «прямые» (точнее, геодезические) линии на цилиндре и на конусе, склеенном из полуплоскости. Однако осталось неясным, как провести геодезическую линию, проходящую через две заданные точки. И сколько таких геодезических? Надеемся, что вы сами справились с этим, но на всякий случай разберём здесь решения двух последних задач.

Решение задачи 6. Есть развёртка конуса с двумя точками A и B на ней. Одну геодезическую, проходящую через A и B , начертить легче лёгкого. Но есть и другая! Ведь можно обходить гору-конус с другой стороны. Это очевидно, например, если обе точки A и B – возле самой линии склейки, по разные стороны от O , и после склеивания окажутся рядом. Но мы сейчас увидим, что это верно для любой пары точек.

Для этого сделаем «переклейку»! Что если разрезать развёртку нашего будущего конуса по другой образующей – по любой, проходящей между точками A и B ? А по старой линии склейки – склеить. Тогда на новой, «переклеенной» развёртке точка B вместе со всем треугольным «отрезанным» сектором окажется повернутой вокруг O на угол 180° (рис. 14).¹ Вот через эту симметричную точку B' и надо проводить прямую.

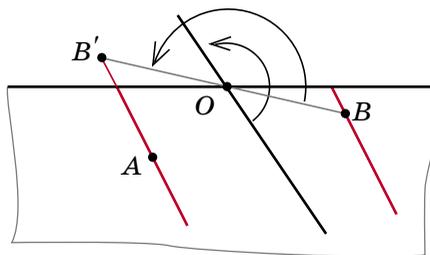


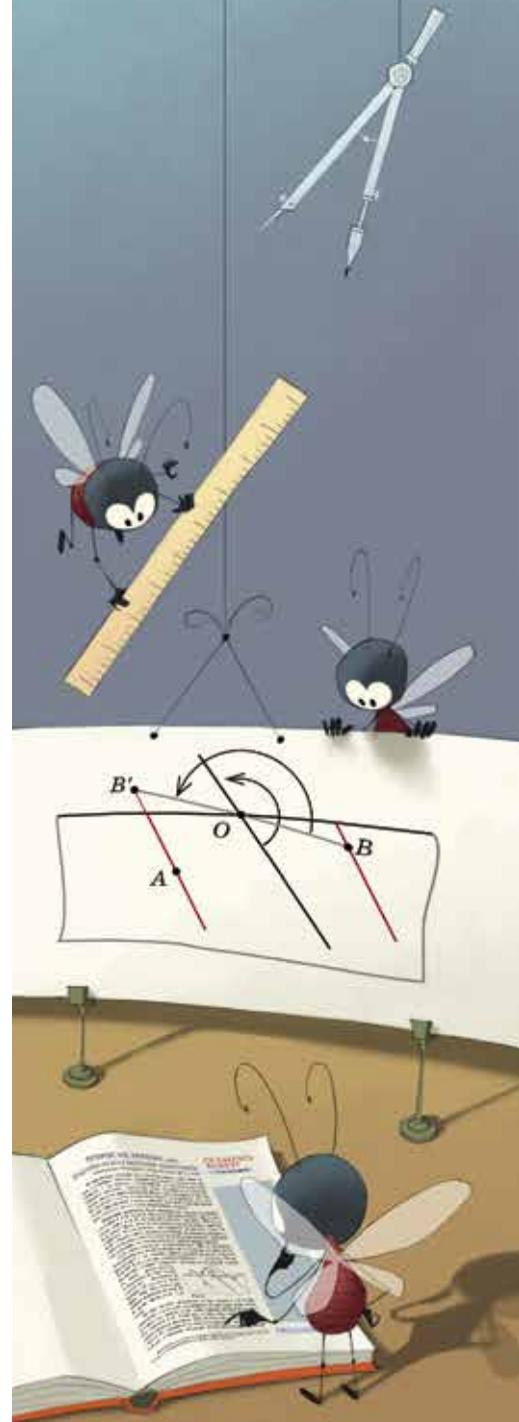
Рис.14

Теперь можно обойтись и без ножниц и клея, оставаясь на старой развёртке: благодаря идее переклейки мы знаем, куда надо направиться из A , чтобы попасть в B . Поэтому достаточно провести вспомогательную прямую BO , построить симметричную точку B' , провести из неё в A прямую линию – вот и готова половина нужной геодезической на старой

¹ Можно резать прямо по той образующей, на которой лежит точка B . Тогда после переклейки она окажется на границе.

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Валерия Сирота





развёртке. Вторую половину легко достроить, как мы делали в задаче 5 из прошлого номера. Даже ещё легче, потому что она пройдет через точку B , и с лишними углами возиться не нужно...²

Итак, на нашем конусе через любые две точки, не лежащие на одной образующей, можно провести две «прямые» линии (рис. 15)! То есть всегда есть два «прямых пути» из одного места в другое. При этом, конечно, один из них может быть короче другого. А есть ли ещё прямые пути? Нет, сколько ни переклеивай, новых «прямых» уже не получишь. Проверьте это!

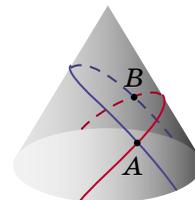


Рис. 15

Задача 9. На развёртке конуса задана точка A . Найдите все такие точки B , что оба пути из A в B имеют одинаковую длину.

Теперь пора разобраться с цилиндром.

Решение задачи 7. Теперь точки A и B даны на развёртке цилиндра. Как провести геодезическую через линию склейки? Можно опять применить «переклейку»: ведь если отрезать нижнюю часть развёртки (например, горизонтальную полосу, включающую одну из точек A и B) и приклеить её сверху – ничего же не испортится? Получится просто другая развёртка того же цилиндра. Точка B при этом переходит в точку B' , которая выше B ровно на ширину развёртки. Значит, если провести прямую AB' , это и будет часть нужной нам геодезической. Теперь можно вернуться к нашей первоначальной развёртке и «достроить» на ней вторую геодезическую (рис. 16). Видно, что обе части геодезической на развёртке параллельны, как и должно быть.

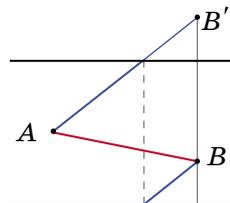


Рис. 16

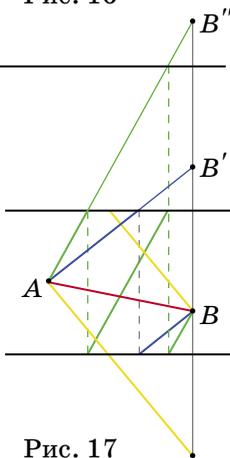


Рис. 17

Нарисуем две развёртки одного и того же цилиндра, одну над другой (рис. 17). При свёртывании их в ци-

² А можно для второй половины подумать про другую переклейку – и построить точку A' , симметричную точке A ...

лиандр они ложатся одна на другую, точки B и B' совпадают. Но что если добавить сверху третью развёртку? Линия AB'' – тоже геодезическая! Она «обмоталась» один раз вокруг цилиндра и тоже пришла в точку B (рис. 18). А можно продолжить так и дальше, появятся геодезические, обматывающиеся вокруг цилиндра 2, 3, 5, 10 раз... Их бесконечно много! Да ещё и вниз можно так же «копировать» развёртки, получится ещё одно семейство геодезических, «закрученных» в другую сторону.

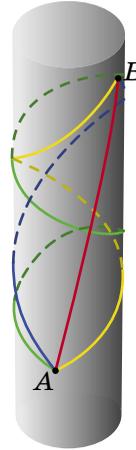


Рис. 18

Вот это да – на цилиндре через одни и те же точки проходит сколько угодно прямых путей, если, конечно, эти точки на развёртке не попадают на прямую, параллельную линии склейки. Может, и на конусе так же, мы просто что-то не заметили? Нет. Дело в том, что на цилиндре мы использовали симметрию сдвигов – «копировали» развёртки вверх, и у точки B получилось бесконечно много изображений. На конусе симметрия – поворот вокруг точки O ; можно тоже сделать две развёртки, накладывающиеся друг на друга, – верхняя и нижняя полуплоскости. Но только две! Второй поворот вокруг точки O на 180° вернёт точку B обратно, новых её изображений и новых путей к ней не возникнет.

Более того: если сделать конус пошире, то есть брать для развёртки не полуплоскость, а сектор больше 180° , то и двух путей может не получиться: на рисунке 19 точки A и B соединяют две геодезические (красная и синяя), а точки A и C или

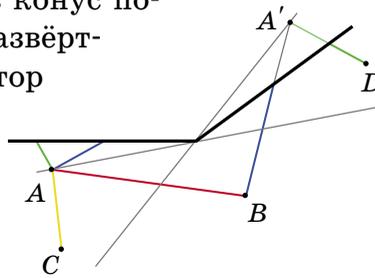


Рис. 19

A и D – только одна (соответственно, жёлтая и зелёная). В первом случае нет пути через линию разреза, во втором – нет другого пути, кроме как через разрез. На пологом холме для достаточно близких точек уже нет прямого пути «в обход холма». Обратите внимание – на таком конусе концы любой геодезической уже не параллельны, а расходятся.





Узкие конусы

А теперь давайте сделаем конус поуже. То есть для развёртки возьмём не целую полуплоскость, а сектор поменьше. Поскольку про переклейку всё остаётся в силе, все геодезические по-прежнему будут выглядеть одинаково и зависеть только от одного параметра – минимального расстояния до вершины конуса. Поэтому достаточно рассмотреть какую-то одну геодезическую; возьмём такую, которая на нашей развёртке перпендикулярна линии склейки (рис. 20). Раз она подходит к склейке под прямым углом, то и уходит от неё должна тоже под прямым..., и смотрите, что получится – эта «прямая» линия пересекается сама с собой! На склеенном конусе получается «галстучек» (рис. 21)

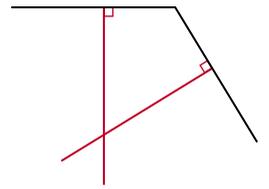


Рис. 20

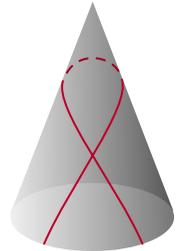


Рис. 21

А дальше ещё веселее. Если взять ещё более узкий конус, с развёрткой меньше 90° , то – глядите! – после этого самопересечения обе части геодезической снова пересекают линию склейки, причём в одном и том же месте! Обратите внимание, что из-за симметрии картинка на развёртке всё выглядит так, как будто геодезическая отражается от линии склейки. На самом деле это не отражение, хоть и очень на него похоже – концы геодезической при переходе линии склейки меняются местами. Как только вы сложите развёртку в конус – это сразу станет видно.

Это уже второе пересечение геодезической самой с собой. А может быть ещё и третье – если после этого пересечения линии склейки концы геодезической снова пересекутся в середине развёртки... Если конус совсем узкий, геодезическая обвивает его много раз, на каждом обороте пересекаясь сама с собой два раза – под самой верхней (ближней к вершине) точкой и строго по другую сторону от этой точки (рис. 22).

Задача 10. У каких конусов, то есть при каких углах раз-

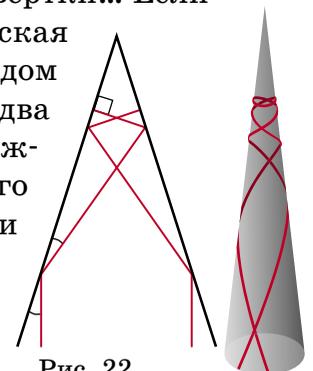


Рис. 22

вёртки, геодезическая пересекается сама с собой один раз? Два раза? Три раза? Четыре раза? N раз?³

Вот мы и узнали, как выглядят геодезические даже на самых крутых и высоких горах. Отважным путешественникам, впрочем, ещё есть чем заняться – хорошо бы разобраться, как же там ходить из одной заданной точки в другую.

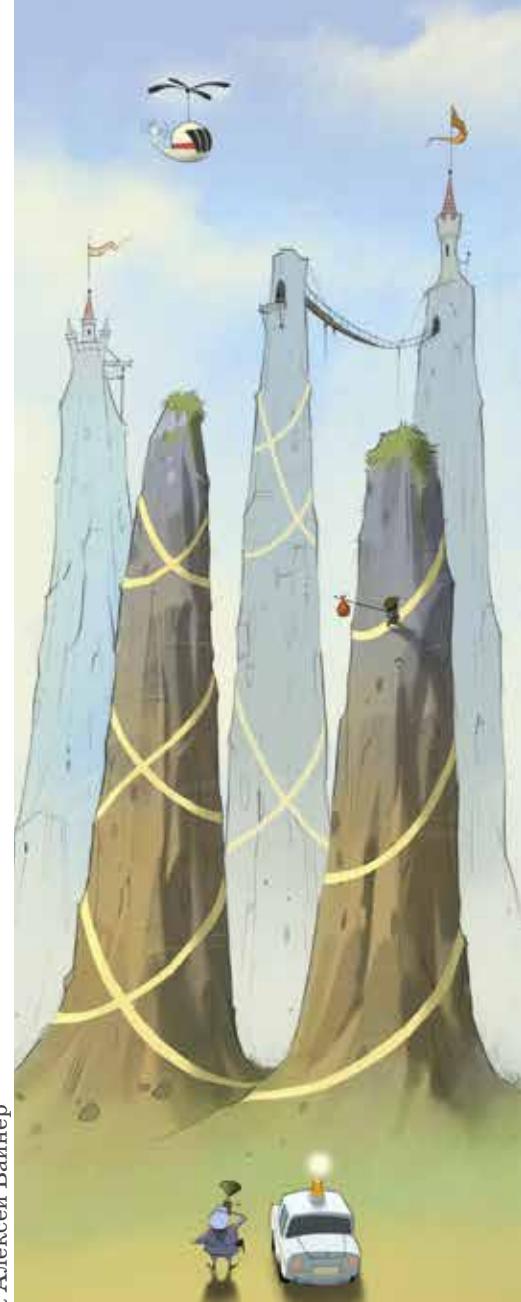
Задача 11. Найдите (начертите на развёртке) все геодезические, проходящие через заданные точки A и B , для конуса с углом развёртки а) 120° ; б) 90° ; в) (для самых смелых) 110° .

Задача 12. На конусах с какими углами развёртки выполнено свойство: через любые две точки проходят не меньше трёх геодезических? А не меньше чем n геодезических? (Пары точек, лежащие на одной образующей, не рассматриваем.)

Вот и подходит к концу наше путешествие по отвесным цилиндрам и крутым конусам.⁴ Представьте теперь, в заключение, что вы находитесь в горной стране из высоких-превысоких гор и крутых ущелий. Если в таком месте пойти прямо, по геодезической – вы, скорее всего, рано или поздно попадёте на склон горы и, поскольку это конус, вынуждены будете карабкаться по нему по спирали вверх, а потом вниз, как на рисунке на полях. Спустившись, вы продолжите движение уже не в том же направлении, что раньше, а в какую-то другую сторону... Отсюда видно, что идти прямо, напролом в горах не только опасно, но и глупо: если даже все поверхности гладкие и нигде нет ни трещин, ни крутых обрывов, и вы не сломаете шеи по дороге – вы всё равно придёте неизвестно куда. Вот почему для горных туристов и альпинистов так важны ум и опыт.

³ *Подсказка.* Не бойтесь этой задачи, она совсем не страшная. Нужно просто спокойно порисовать развёртки и геодезические на них. Единственное, что нужно знать из геометрии, – это что сумма углов любого треугольника на плоскости равна 180° .

⁴ Цилиндры и конусы удобны тем, что для них можно сделать плоскую развёртку. Существует много других «развертывающихся поверхностей», но среди всех поверхностей в пространстве они составляют крайне малую часть. Остальные поверхности – сферы (мячики), торы (бублики) и другие – нельзя склеить из кусков плоскости. Строить на них геодезические сложнее. Но принцип – идти «маленькими шажками» – всегда тот же.



Художник Алексей Вайнер