



ПАРАЛЛЕЛЬНИКИ, ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНИКИ И РАВНЫЕ ПЛОЩАДИ

*Параллельник*¹ — это многоугольник с таким хитрым свойством. Будем двигаться по контуру многоугольника, начав с любой вершины или стороны, одновременно в двух направлениях: доходим до двух «следующих» вершин (по часовой стрелке и против) и проводим соединяющий их отрезок, идём до двух следующих вершин — и соединяем, и т. д. (Мы как бы «разлиновываем» многоугольник на «полоски», в основном четырёхугольные, только в начале и в конце может быть треугольник, рис. 1.) Так вот, если, с какой вершины или стороны ни начни, все проведённые отрезки будут параллельны друг

другу (и стороне, если с неё начинали), перед нами — параллельник.

Любой параллелограмм — параллельник. На рисунке 2 вы видите пятиугольный параллельник (наборы параллельных отрезков окрашены одним цветом).

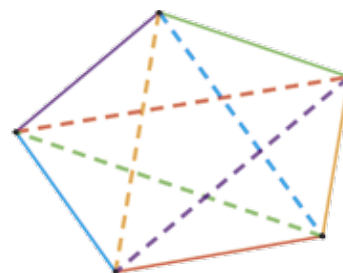


Рис. 2

Если вы знакомы с правильными многоугольниками (в них равны все углы и все стороны), можно сказать ещё и так: в параллельнике параллельны друг другу те же стороны и диагонали, как если бы он был правильным.

¹ По-научному — аффинно правильный многоугольник.

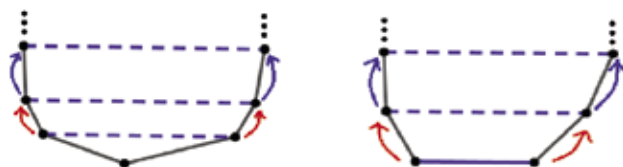


Рис. 1

ОЧЕНЬ СЛОЖНЫЙ
УЧАСТОК

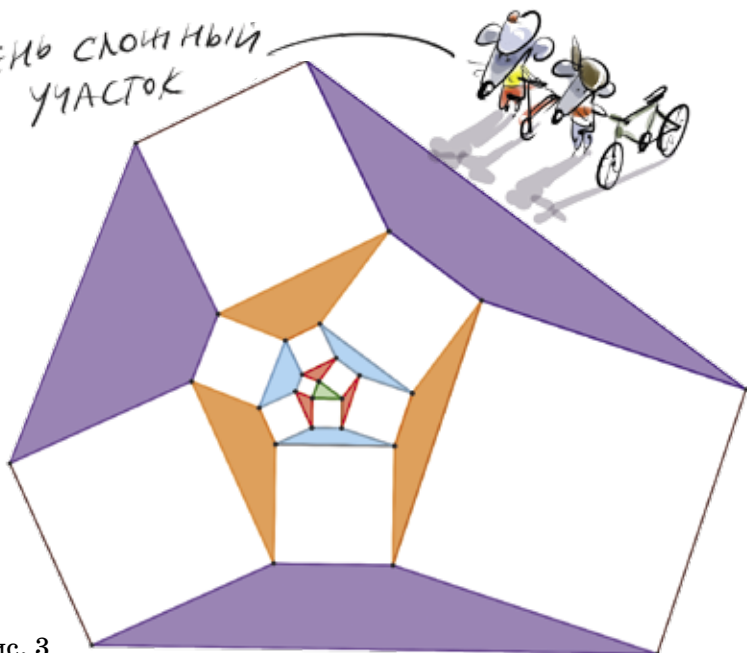


Рис. 3

А теперь посмотрите на рисунок 3. В центре – произвольный треугольник (зелёный). На его сторонах построили «наружу» белые квадраты. Некоторые из их вершин соединили отрезками, на них снова построили «наружу» белые квадраты и т. д. В промежут-

ках между квадратами образовались треугольники и четырёхугольники. Оказывается, площади всех многоугольников одного и того же цвета равны, а все четырёхугольники – трапеции. Эту теорему доказали в 2001 году американские математики D. DeTemple и M. Hudelson.²

Они же заметили, что треугольник в центре можно заменить на любой параллельник – и теорема будет верна! На рисунках 4 и 5 – примеры, когда в центре параллелограмм и пятиугольный параллельник.

² D. DeTemple, M. Hudelson. Square-Banded Polygons and Affine Regularity. The American Mathematical Monthly, vol. 108, no. 2 (feb., 2001), pp. 100–114.

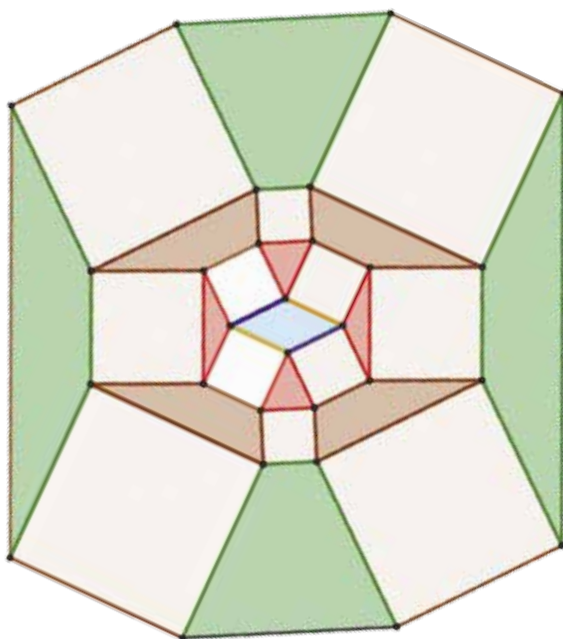


Рис. 4

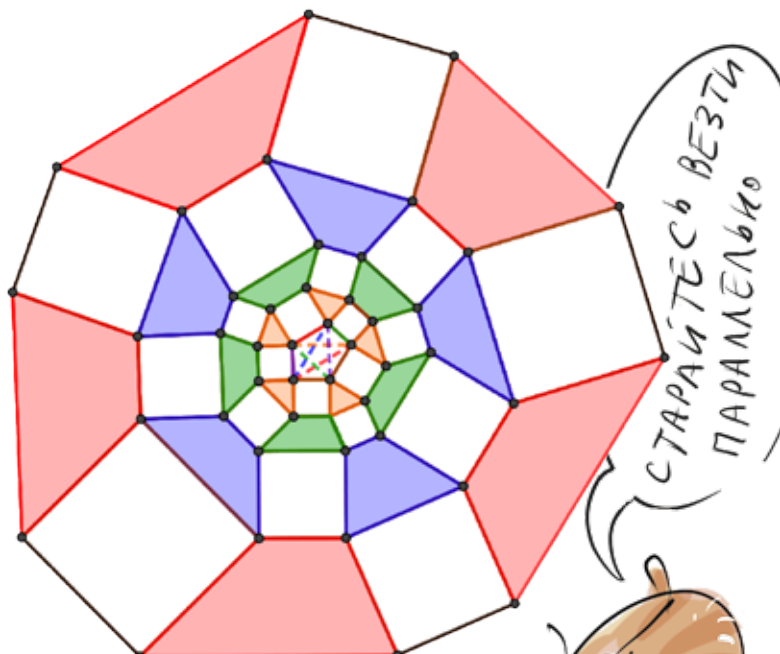


Рис. 5

СТАРАЙТЕСЬ ВЕЗТИ
ПАРАМЕТРИКО



А что, если вместо параллельника взять *полу*параллельник? Его определение почти такое же, только теперь мы всегда начинаем обход многоугольника с пары соседних вершин (см. рис. 1, справа). Для нечётноугольников ничего не изменится: даже если начнём со стороны, придём к вершине. А для чётноугольников мы выкинем половину условий. На рисунке 6 – пример шестиугольного полупараллельника. Диагонали, отсекающие противоположные углы, уже не обязаны быть параллельными (таких там три пары).

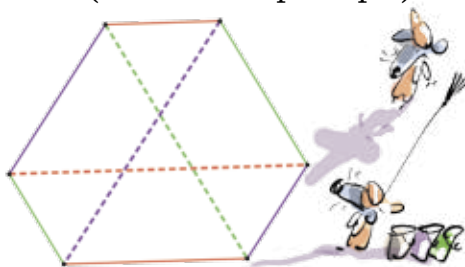


Рис. 6

Оказывается, теорема тоже будет верна «наполовину». Раньше в каж-

дом «круговом» слое были равны площади всех многоугольников между белыми квадратами, а теперь в чётных слоях (2-м, 4-м, 6-м, ...) они будут равны «через один». На рисунках 7 и 8 равные площади – одного цвета.

Теперь четырёхугольники между белыми квадратами будут трапециями лишь в чётных слоях. Отметим также, что диагонали одноцветных четырёхугольников делят друг друга в одинаковых отношениях. Четырёхугольники могут даже самопересекаться, и тогда надо рассматривать их *ориентированную площадь* (но это тема для отдельного разговора).

Доказательства утверждений о полупараллельниках планируется напечатать в одном из ближайших номеров журнала «Квант». Чертежи к статье подготовлены в программе GeoGebra. Поэкспериментировать с чертежами можно по ссылке kvan.tk/parall

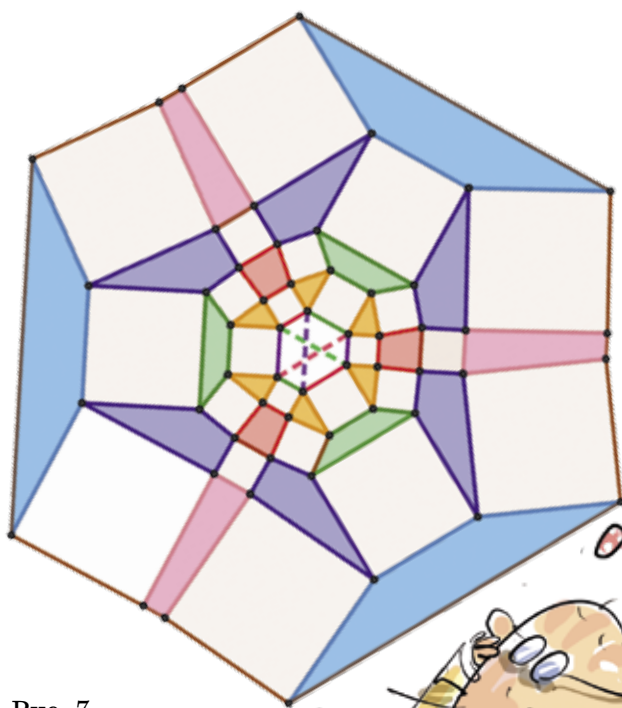


Рис. 7

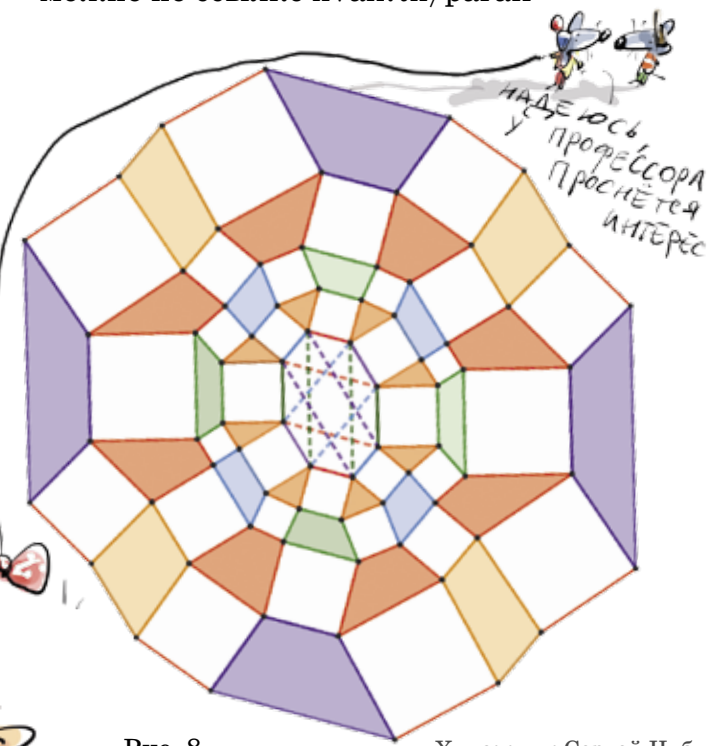


Рис. 8

Художник Сергей Чуб