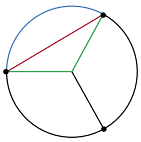
НАШ КОНКУРС, I тур («Квантик» № 9, 2020)

1. *Гриша положил на левую чашку равноплечих весов три гирьки массой 1/8, 1/9 и 1/10 граммов. Можно ли положить на правую чашку две гирьки, веса которых – дроби с числителем 1, чтобы они уравновесили три гирьки на левой чашке?*

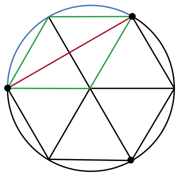
Ответ: да, 1/3 и 1/360. Действительно, $(1/8+1/9)+1/10=17/72+1/10=242/720=121/360$.

С другой стороны, $1/3+1/360=120/360+1/360=121/360$.

2. *На окружности расположены три дома на равном расстоянии друг от друга. Как короче пройти от одного дома до другого – по дуге окружности (синий путь) или через центр окружности (зелёный путь)?*



Ответ: через центр окружности. Впишем в окружность правильный шестиугольник так, чтобы три его вершины совпали с домиками. Отметим ещё один зелёный путь по двум сторонам шестиугольника (см. рисунок). Поскольку шестиугольник состоит из равных правильных треугольников, оба зелёных пути равны. Но каждая из сторон шестиугольника будет короче дуги окружности, опирающейся на эту сторону (ведь кратчайший путь – отрезок). Значит, зелёный путь короче синего.



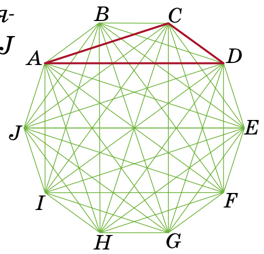
Комментарий. Если радиус окружности равен 1, то длина окружности (утроенный синий путь) равна 2π, а периметр шестиугольника (утроенный зелёный путь) – 6. Тем самым мы доказали, что $\pi > 3$.

3. *На листках отрывного календаря на год написаны числа, соответствующие датам каждого месяца. Хулиган Петя хочет оторвать несколько листков (не обязательно подряд) так, чтобы на оставшихся листках не нашлось двух чисел, одно из которых в три раза больше другого. Какое наименьшее число листков ему придётся оторвать?*

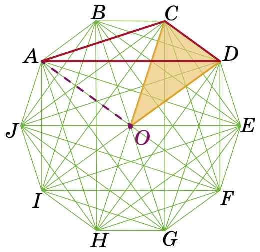
Ответ: 95. Сначала решим задачу для января. Выпишем «цепочки» чисел, в которых одно больше другого в 3 раза, каждый раз начиная с числа, не вошедшего в предыдущие цепочки. Для каждой цепочки выпишем количество листков, которое необходимо оторвать, чтобы «разрушить» все пары чисел. В цепочке 1-3-9-27 необходимо убрать 2 листка, а в цепочках 2-6-18, 4-12, 5-15, 7-21, 8-24 и 10-30 необходимо убрать по 1 листку. То есть в январе нужно оторвать 8 листков.

Понятно, что столько листков нужно оторвать во всех остальных месяцах, кроме февраля. Мы будем отрывать те же самые листки, что и в январе. А в феврале можно оторвать на один листок меньше, потому что в нём нет пары 10-30. Итого, в календаре на год необходимо оторвать $11\cdot 8+7=95$ листков.

4. *Дан правильный десятиугольник ABCDEFGHIJ (все его стороны равны, и углы тоже). Какую часть его площади занимает треугольник ACD?*



Ответ: 1/10. Обозначим центр нашего 10-угольника через O. Отрезки CD и AO параллельны. Значит, треугольники ACD и OCD имеют одинаковую площадь: у них равны высоты, опущенные на общее основание CD (такие *перекашивания* с сохранением площади помогают в разных задачах – см., например, статью «Площади и перекашивания» в «Квантике» № 2 за 2020 г.). Весь 10-угольник состоит из равнобедренных треугольников с вершиной в O и основаниями на сторонах 10-угольника. Таких треугольников 10 и площадь каждого равна площади OCD.



5. *На клетчатой плоскости (все клетки – квадратики 1×1) нарисован прямоугольник по линиям сетки. Его разрезали по линиям сетки на N прямоугольников, проведя несколько горизонтальных и вертикальных разрезов от края до края. Докажите, что можно покрасить какие-то из этих N прямоугольников (возможно, один или все) так, чтобы окрашенная область была прямоугольником площади, делящейся на N.*

Пусть горизонтальные разрезы делят вертикальную сторону на a частей, длины которых x_1, x_2, ..., x_a соответственно. По принципу Дирихле, среди $a+1$ чисел 0, x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, ..., $x_1+x_2+...+x_a$ найдутся два, имеющих одинаковый остаток при делении на a. Тогда их разность делится на a и равна сумме длин $x_i+...+x_j$ каких-то последовательных частей вертикальной стороны. Они заключены между двумя горизонтальными прямыми (разрезами или сторонами).

Теперь обратимся к вертикальным разрезам. Пусть они делят горизонтальную сторону на b частей. Аналогично, найдутся две вертикальные прямые (разрезы или стороны), расстояние между которыми делится на b.

Тогда площадь прямоугольника, ограниченного четырьмя найденными прямыми (парой горизонтальных и парой вертикальных), будет делиться на ab. Но $N = ab$.

ПЯТЬ СТОРОН СВЕТА («Квантик» № 10, 2020)

Поскольку слова *urait*, *kalaut*, *anait* и *suali* во время прогулки путешественника то и дело «меняют значения», видимо, носители языка мбало ориентируются не по сторонам света. Ориентация относительно человека (направо – налево – вперёд – назад) также не согласуется с данными условия. Ошибка путешественника в том, что он пытается применить к незнакомому языку привычную ему систему ориентации, не задумавшись, насколько это правомерно.

Путь от алмазного рудника к школе – *andoor*, а к дому вождя – *suali*, хотя школа и дом вождя лежат в одном направлении. Но можно заметить, что их разделяет река.

Посмотрим внимательно на использование слова *suali*. Относительно дома вождя это направление на запад, относительно рисовой плантации – на юг, относительно школы и алмазного рудника – на восток. Но во всех этих случаях местные жители указывают путешественнику дорогу через реку!

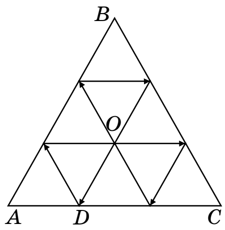
Ответ: основанием системы ориентации в языке мбало является река. Слово *urait* означает «против течения», *kalaut* – «по течению», *anait* – «от реки» и *suali* – «через реку». Отсутствующее в словарике путешественника слово *andoor* означает «к реке».

Дополнение. Интересно, что в языке мбало вообще нет понятий «справа», «слева», «впереди», «позади». Там, где путешественник сказал бы: «Вождь стоит слева от меня, а учитель – справа», – жители деревни выразились бы иначе: «Вождь стоит к реке ‘от путешественника’, а учитель – от реки».

Мбало относится к языкам, в которых люди описывают положение чего-либо с помощью неподвижных ориентиров, а не относительно себя. К удивлению европейцев, носители подобных языков за столом просят передать соль, которая стоит «к югу» от слушающего, а учась танцам, делают «шаг на восток, два шага на запад». Исключение делается для частей своего тела: правая и левая рука остаются правой и левой независимо от расположения их владельца. Чтобы свободно говорить, носителям таких языков надо всегда знать, где они находятся и с какой стороны север и юг или их аналоги.

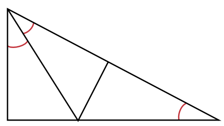
Ориентирами могут быть и стороны света, и местные их эквиваленты, как в языке мбало. В деревне на острове Калимантан, где говорят на этом языке, вся жизнь организована вокруг реки – неудивительно, что река занимает центральную позицию и в системе координат мбало.

ИЗ ЖИЗНИ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА («Квантик» № 10, 2020)



1. Ответ: могут. Пример изображён на рисунке. Поставим шар в точку D, для которой $AD = AC/3$, и пустим его параллельно стороне BC. Тогда шар пройдёт через центр треугольника ABC (точка O) три раза в трёх различных направлениях и вернётся в исходную точку.

2. Ответ: могут. Из трёх одинаковых прямоугольных треугольников с углами 30° и 60° можно составить один большой прямоугольный треугольник с углами 30° и 60° (см. рисунок).



3. Ответ: не обманывает. Заметим, что сумма весов пяти монет не менее $10\,г + 20\,г + 30\,г + 40\,г + 50\,г = 150\,г$, а сумма весов двух монет не более $70\,г + 80\,г = 150\,г$, причём только в случае этих наборов две монеты уравновесят пять монет. Следовательно, если барон положит на одну чашу весов две монеты, а на другую – пять и весы установятся в равновесии, он сможет утверждать, что осталась монета весом 60 г.

4. Ответ: одна гиря. Совсем без гирь не обойтись. Покажем, что достаточно одной гири весом 1 кг. С помощью неё барон может показать, что каждая следующая утка ровно на 1 кг тяжелее предыдущей. Итак, утки имеют веса x, $x+1$, $x+2$, ..., $x+14$ кг. Положим теперь на первую чашу весов 8 самых лёгких уток, а на вторую – семь остальных и гирю 1 кг. Весы установятся в равновесии тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+7)=$$
$$=1+(x+8)+(x+9)+\ldots+(x+14),$$
откуда $8x+28=7x+78$ и $x=50$. Так барон докажет, что самая лёгкая утка весит 50 кг. Поэтому остальные весят 51 кг, 52 кг, ..., 64 кг.

ПУЗЫРЬКИ **(«Квантик» № 10, 2020)**

1. Чтобы весь воздух оказался в средней части, достаточно закрутить игрушку вокруг вертикальной оси. Всё дело в центробежной силе, которая направлена от оси вращения (вспомните карусель, на которой прижимает к стенкам). Эта сила играет роль силы тяжести, и вода прижимается к стенкам, а пузырьки воздуха «всплывают», то есть движутся против центробежной силы – к оси вращения. По тому же принципу разделяются смеси в центрифугах: более лёгкие компоненты оказываются ближе к оси вращения.

2. Пузырь, пытаясь всплыть, тянет за собой жидкость. Получается горка с пузырём на вершине. Когда два пузыря рядом, уровень воды между пузырями выше, чем с других сторон от пузырей (рис. 1). Всплывая, пузыри устремляются в сторону большего уровня воды и тем самым сближаются. О похожем эффекте читайте в статье «Фотографии свободно плавающих тел» в «Квантике» №8 за 2018 год.


Рис. 1

Обычно у стенки тоже вырастает горка жидкости, например, если вода, чай или газировка налиты не до самого верха. Поэтому пузырь устремится к стенке. Если же жидкость налита с горкой, то на поверхности пузыри будут двигаться не к стенке, а от неё.

3. Если жидкость после того, как пузырь лопается, отчётливо собирается в круглые капли, то поверхностное натяжение играет тут большу́ю роль. И чем меньше размеры капли, тем больше натяжение доминирует над массой. Представьте, что мы разрезали большую каплю на маленькие. На ту же (суммарную) массу воды придётся гораздо больше энергии поверхностного натяжения: ведь, разрезая каплю, мы как бы растянули её поверхность, причём во много раз, делая разрезы по всей толще капли. Вот меньшие капли и выстреливают выше – суммарно подлетает одно и то же количество воды, но энергия увеличилась!

Поскольку во время схлопывания сила тяжести не играет большой роли, можно понять и почему вертикальные брызги становятся наклонными у краёв сосуда. Раз капля ориентируется не на направление силы тяжести, а на форму поверхности воды вокруг, логично, что у краёв, где поверхность воды наклонена из-за смачивания, аналогично наклоняются и выстрелы.

А вот само возникновение всплеска устроено непросто. Но в сложном процессе схлопывания/распрямления поверхности пузыря часть его жидкости разгоняется к центру, и когда она там сталкивается (сама с собой), ей некуда деваться кроме как вверх и вниз. Верхняя струя, направленная вдоль оси симметрии пузыря (эта ось перпендикулярна поверхности воды, по которой плавает пузырь), быстро распадается на отдельные капли, что мы и видим.

4. Как и в задаче 3, работу на подлёт капельки совершает поверхностное натяжение воды: прежняя капля сливается с водой, позволяя натяжению сокращать общую поверхность. И, как растянутая пружина, которой позволили сжаться, оно, высвобождая энергию, может попутно подкинуть каплю. Причём, как и в задаче 3, чем меньше размер, тем выше поверхностное натяжение подкидывает каплю.

Но детали самого подскока не совсем похожи (правда, тоже замысловаты). В процессе «схлопывания» капельки, у её макушки тоже возникает поток воды к центру. Макушка пытается выстрелить вертикально вверх, и её отрывающаяся верхушка — это и есть следующая капелька. Но тут (в отличие от пузыря) прибывающая вода имеет больше пространства для отступления и разгоняется вверх слабее – не быстрой тонкой струёй, а толстым медленным столбиком. И пока этот столбик (относительно медленно) пытается разорваться, он, как оттянутая вверх пружина, устремляется вниз. В результате, когда верх столбика оторвётся, эта отделившаяся капелька уже быстро летит вниз, и (если не сольётся с водой) отскочит от поверхности вверх – как мяч, с силой брошенный вниз, отскакивает высоко вверх.

ДРЕВНЕИНДИЙСКИЕ КАРШАПАНЫ

На рисунке одинаковыми цветами показаны повторяющиеся оттиски. Одинаковый набор – на монетах 2, 6, 10:


1 2 3

4 5 6 7 8 9 10

Никто не знает, что эти символы значат. Думают, что два универсальных – солнце (красное) и колесо с шестью выступами (жёлтое) – это символы государственной власти, а остальные обозначают конкретного правителя, место чеканки и т. п., но это лишь предположения.

ЗВЁЗДНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. В $2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25$ раз; в $2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\approx 15{,}6$ раз.

2. $0{,}5^m-(-1{,}5^m)=2^m$; разница опять в $2{,}5\cdot 2{,}5=$ $=6{,}25$ раз.

3. $0{,}5^m$ во столько же раз ярче 1^m, во сколько слабее 0^m. Поэтому они отличаются в такое число x раз, что $x\cdot x=2{,}5$; $x=\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}6$ раз.

4. Разница $-12{,}7^m-(-26{,}7^m)=14^m$; $14=5+5+$ $+5-1$. Значит, отличие в $100\cdot 100\cdot 100:2{,}5=$ $=400\,000$ раз.

5. Разница $27^m-6^m=21^m$, $21=4\cdot 5+1$; отличие в $100\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 2{,}5=250$ млн раз.

6. $1000=10\cdot 10\cdot 10$, поэтому громкость отличается на $3\cdot 10=30$ дБ. Миллион – это 6 перемноженных десяток, каждое умножение на 10 соответствует изменению громкости на 10 дБ, поэтому разница $6\cdot 10=60$ дБ. Это разница между тихим шёпотом и звуком проезжающего мимо грузовика.

7. Свет: $5^m-(-12{,}7^m)=17{,}7^m$ от слабой звезды до Луны, перепад между самым ярким и самым слабым $5\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 100:(2{,}5\cdot 2{,}5)\approx$ ≈ 100 млн раз. Звук: 120 дБ $=12\cdot 10$ дБ, перепад $10^{12}=1$ миллион миллионов раз. Выходит, у уха диапазон больше, чем у глаза. (Мы считали, что глаз адаптирован к ночному пейзажу.)

8. Площадь объектива увеличилась в 4 раза. Количество улавливаемого телескопом света возросло в 4 раза $\approx 2{,}5\cdot\sqrt{2{,}5}$, то есть на полторы звёздных величины, до $11{,}5^m$. Различие на 5^m – это в 100 раз. Чтобы в 100 раз увеличить площадь, нужно взять диаметр в 10 раз больше.

9. Энергия, излучаемая звездой каждую секунду, распределяется равномерно во всех направлениях. Окружим каждую звезду воображаемой сферой с радиусом, равным расстоянию от неё до нас. Радиус сферы вокруг A окажется в 2 раза больше, чем вокруг B, а площадь сферы – в 4 раза больше. Одинаковая энергия излучения «размазывается» на бо́льшую площадь, и на каждый кусочек (например, 1 см^2) сферы A попадёт в 4 раза меньше энергии, чем на такой же кусочек сферы B. Значит, звезда A для нас светит в 4 раза слабее, чем B. Это примерно $1{,}5^m$.

Разница 10^m – это в $100\cdot 100=10^4$ раз. Значит, звезда в $\sqrt{10000}=100$ раз дальше.

ПОХОЖЕ, НО – КАКАЯ РАЗНИЦА!

На трубке, изображённой на фото справа, есть дырочка. А концы трубки закупорены белыми пробками – их можно разглядеть сквозь едва прозрачную поверхность трубки. Когда сжимают бутылку, порция воды за счёт избыточного давления затекает внутрь трубки. При этом трубка чуточку поворачивается по часовой стрелке. Когда бутылку отпускают, вытекающая из отверстия короткая струйка воды сильно закручивает трубку в обратную сторону.

Как это происходит, можно посмотреть на видео: kvan.tk/diver-rot1 и kvan.tk/diver-rot2

ПАСЬЯНС ИЗ СЛОВЕСНЫХ КВАДРАТОВ

1.

о	п	у	с
ч	а	д	о
к	р	а	х
и	к	р	а

х	р	о	м
л	о	з	а
о	б	о	з
р	а	н	ь

о	с	о	т
м	е	р	а
у	ч	ё	т
т	а	л	ь

2.

у	р	о	к
д	е	п	о
а	к	ы	н
р	а	т	ь

у	с	а	ч
л	о	з	а
о	в	о	щ
в	а	т	а

ш	н	у	р
к	о	з	а
а	т	о	м
ф	а	р	а

л	о	с	к
у	з	е	л
з	о	л	а
а	н	о	д

По столбцам появились 16 слов, которых не было в исходном списке: *удар*, *река*, *опыт*, *конь*, *улов*, *сова*, *азот*, *чаща*, *шкаф*, *нота*, *узор*, *рама*, *луза*, *озон*, *село*, *клад*.

ЗАДАЧКИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. Второе. **2.** За 10 минут.

3. Лифт поднимается на 2 этажа за 12 секунд, значит, на 8 этажей поднимется за 48.

4. За 3 минуты Вова пройдёт 300 метров, а Петя пробежит 600 метров и они встретятся. Значит, за 5 минут до встречи они были дома и между ними было 900 метров.

5. Петя и Вася сближались за час на 5 км, и, значит, встретились через 2 часа. За это время заяц со скоростью 10 км/ч пробежал 20 км.