# ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Андрей Андреев,
Полина Ачева,
Алексей Панов

В школьной геометрии *угол* – это фигура, состоящая из двух лучей, выходящих из одной точки (рис. 1). Эта точка называется *вершиной* угла, а лучи – его *сторонами*. Угол разбивает плоскость на две части: на рисунке 2 они окрашены в зелёный и жёлтый цвет. Эти части называются *плоскими углами*.

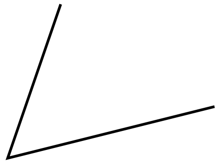

Рис.1. Угол

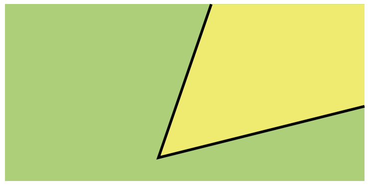

Рис. 2. Два плоских угла – зелёный и жёлтый

Измерить угол можно обычным транспортиром, который размечен в градусах от 0° до 180° (рис. 3, слева). Плоские углы удобно измерять круговым транспортиром, размеченным от 0° до 360° (рис. 3, справа).

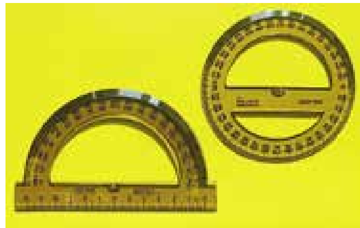

Рис. 3. Транспортиры – полукруговой и круговой

Конечно, для научных и технических измерений углов нужны более точные приборы: например, такие, как на рисунке 4. Слева там изображён один из астрономических инструментов Тихо Браге, с которым он проводил свои высокоточные наблюдения. Результаты этих наблюдений позволили Кеплеру вывести законы движения планет. Справа – современный электронный теодолит, используемый в геодезии.

Рис. 4. Секстант Тихо Браге и современный теодолит

А можно ли измерять углы, не применяя вообще никаких инструментов?

**«Ручное измерение» углов.** Об этом методе мы прочли в книге «Музыка сфер. Математика и астрономия», написанной Розой Марией Рос. Цитируем:

*…Существует очень простой, хотя и не слишком точный, способ измерения углов вручную. Если мы вытянем руку перед собой, то растопыренная ладонь будет указывать интервал в 20°, кулак – 10°, большой палец – 2°, мизинец – 1°. Этот способ могут использовать и взрослые, и дети, так как размеры ладони человека увеличиваются пропорционально длине его руки.*


Рис. 5. Ручное измерение углов

Поясним сказанное. Пусть мы наблюдаем за двумя звёздами, расположенными на небе недалеко друг от друга. Направление взгляда на каждую из них задаёт луч. Угол между этими двумя лучами (с вершиной в глазу наблюдателя) мы и хотим измерить. Его величина называется *угловым расстоянием* между звёздами. Вытянем правую руку с растопыренной ладонью, как на рисунке 5 справа. Если кончик большого пальца закрывает одну звезду, а кончик мизинца – другую, угловое расстояние между звёздами можно оценить в 20°. Прикладывая ладони друг к другу, можно измерять углы до 40° (рис. 5, справа внизу).

**Задача 1.** Звёздной ночью найдите на небе ковш Большой Медведицы (рис. 6) и «вручную» оцените угловое расстояние между звёздами Мерак и Дубхе.

Напомним: в направлении Мерак → Дубхе расположена Полярная звезда, указывающая путь на север.


Рис. 6. Ковш Большой Медведицы.

**Задача 2.** Отыщите на небе Полярную звезду и найдите угловое расстояние между ней и звездой Дубхе.

Решив задачи, вы сможете проверить себя, так как известно, что расстояние Дубхе – Полярная звезда примерно в 5 раз больше расстояния Мерак – Дубхе.

Конечно, ручное измерение углов не позволяет добиться хорошей точности. Сейчас мы опишем бесприборный метод измерения углов, позволяющий проводить измерения со сколь угодно высокой точностью. Начнём с нескольких экспериментов.

**Эксперименты с треугольниками: «60°» ≠ 60°.** Мы купили несколько одинаковых треугольников, как на рисунке 7. Углы этого треугольника по стандарту должны быть равны 30°, 60° и 90°, но мы хотим проверить, так ли это на самом деле. Начнём со среднего по величине из этих углов, обозначив его $\alpha$. Итак, верно ли, что $\alpha = 60°$?

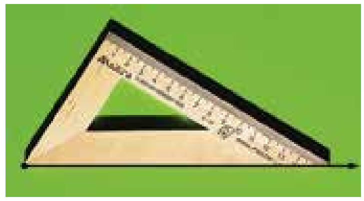

Рис. 7. Треугольник

**Эксперимент № 1: поворачиваем треугольники.** Выложим на плоскость один за другим шесть треугольников, как на рисунке 8: каждый получен из соседнего поворотом на угол $\alpha$.

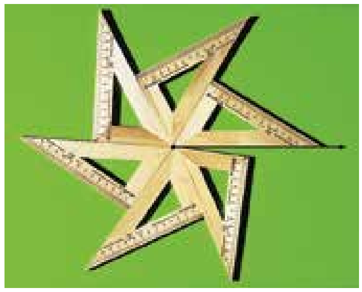

Рис. 8. Каждый треугольник получается из соседнего поворотом на угол $\alpha$, kvan.tk/ugolnik-1

Видно, что первый и последний треугольники не сомкнулись, и это означает, что в сумме шесть одинаковых углов $\alpha$ дают меньше 360°, то есть $6\alpha < 360°$ и, значит, $\alpha < 60°$. Выходит, мы купили дефектные треугольники.

На рисунке 8 также видно, что в промежуток между первым и последним треугольником ещё один такой же треугольник никак не поместится. Это говорит о том, что в сумме семь одинаковых углов $\alpha$ больше 360°, то есть $7\alpha > 360°$, откуда $\alpha > 360°/7$. Объединим полученные два неравенства и запишем их в виде

$$\frac{360°}{7} < \alpha < \frac{360°}{6}.$$

**Эксперимент № 2: переворачиваем треугольники.** На рисунке 9 представлен другой способ выкладывания треугольников. Каждый треугольник получается из соседнего переворотом вокруг их общей стороны на 180°. Этот способ даёт такую же оценку измеряемого угла, но он будет удобнее для нас в дальнейшем.

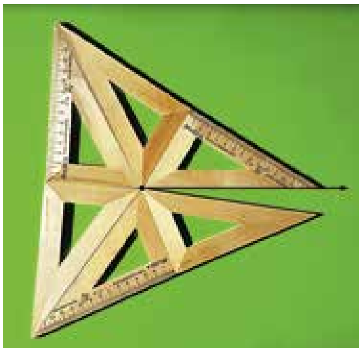

Рис. 9. Каждый треугольник получается из соседнего переворотом на 180° вокруг их общей стороны, kvan.tk/ugolnik-2

Практический совет: чтобы треугольники не смещались при малейшем прикосновении, не укладывайте их на скользкую поверхность. На видео мы воспользовались оборотной стороной коврика для ванной: она сделана из материала, не скользящего даже по влажному гладкому полу ванной комнаты, и идеально подходит для наших экспериментов.

**Уменьшаем число треугольников, увеличиваем точность измерения.** Первое усовершенствование: будем использовать единственный экземпляр треугольника. Опять обозначим один из его углов через $\alpha$. Нарисуем на плоскости луч и совместим вершину угла с вершиной луча, а одну из сторон угла направим вдоль луча, как на рисунке 7. Перевернём треугольник вокруг другой стороны угла (не лежащей на луче). Потом перевернём треугольник вокруг другой стороны угла, опять перевернём и т. д., пока максимально не приблизимся к нарисованному лучу. Так мы определим максимальное $k$, для которого $k\alpha < 360^\circ$ и при этом $(k+1)\alpha > 360^\circ$, то есть

$$\frac{360^\circ}{k+1} < \alpha < \frac{360^\circ}{k}.$$

На видео kvan.tk/ugolnik-3 показан новый процесс измерения для уже знакомого треугольника с углом, близким к 60°, где $k$ получилось равным 6.

Следующая цель – максимально увеличить точность оценки угла. Понятно, что, делая наши перевороты треугольника, совсем не обязательно останавливаться перед начальным лучом. Можно сделать ещё один или даже несколько полных оборотов вокруг

начальной точки луча! Пусть $n$ – общее число сделанных оборотов, $k$ – экспериментально полученное нами число, такое, что $k\alpha < n \cdot 360°$ и одновременно $(k+1)\alpha > n \cdot 360°$. Тогда выполняется двойное неравенство:

$$\frac{n \cdot 360°}{k+1} < \alpha < \frac{n \cdot 360°}{k}.$$

С увеличением $n$ дроби, стоящие слева и справа, сближаются, и угол $\alpha$ определяется всё точнее – и безо всяких приборов!

Как выглядит это измерение для $n = 3$ и нашего треугольника, вы можете посмотреть на видео kvan.tk/ugolnik-4, там $k$ оказалось равным 18. Мы провели измерения для $n = 1, 2, ..., 8$ и для каждого $n$ нашли соответствующее $k$. Результаты см. в таблице.

| $n$ | $k$ | $\frac{n \cdot 360°}{k+1}$ | $\frac{n \cdot 360°}{k}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 51,4° | 60° |
| 2 | 12 | 55,3° | 60° |
| 3 | 18 | 56,8° | 60° |
| 4 | 24 | 57,6° | 60° |
| 5 | 30 | 58,0° | 60° |
| 6 | 36 | 58,3° | 60° |
| 7 | 42 | 58,6° | 60° |
| 8 | 49 | 57,6° | 58,8° |

Судя по последней строке, $57{,}6° < \alpha < 58{,}8°$. Но можно поступить чуть хитрее и заменить значение 57,6° стоящим над ним в седьмой строке 58,6°, получив гораздо более точную оценку $58{,}6° < \alpha < 58{,}8°$.

**Об измерении плоских углов.** Всё сказанное об измерении угла треугольника применимо и к измерению плоского угла, который можно представлять себе вырезанным из очень тонкого и жёсткого листа пластика (рис. 10). В связи с этим задача.

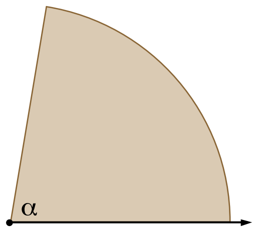


Рис. 10. Плоский угол $\alpha$

**Задача 3.** На рисунке 10 представлен угол $\alpha$. Увеличьте рисунок и по этому шаблону из тонкого жёсткого листа пластика вырежьте соответствующий плоский угол. Используя разобранный нами метод измерения, с помощью переворотов оцените величину этого угла. Тут вас ждёт небольшой сюрприз. Угол на рисунке подобран специальным образом. Существует такое небольшое число $n$, что величина $\alpha$ укладывается в $n \cdot 360°$ целое число раз. Так что с помощью нашего метода вы сможете определить это $n$ и найти точное значение угла $\alpha$.

**Задача 4** (Г. Фельдман, Д. Баранов, XXXI Турнир городов). Нарисован угол, и ещё имеется только циркуль.

а) Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) Как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

В пункте *б* можно обойтись и без циркуля, если есть деревянный угольник с данным углом, о котором мы хотим выяснить, равен ли он 31°.

И напоследок – небольшой список увлекательных книг, в которых обсуждается измерение углов в астрономии и геометрии, с небольшими аннотациями.

1. Роза Мария Рос. *Музыка сфер. Астрономия и математика* (М.: Де Агостини, 2014). В этой замечательной книге рассказывается о планетах и звёздах, об измерении углов, космических расстояний и времени.

2. Александр Шень. *Космография* (М.: МЦНМО, 2019). В книге разбираются основные вопросы космографии: как движутся звёзды по небу, отчего бывают зима и лето, почему Луна видна в форме серпа, когда и как происходят затмения. Прочитав её, вы поймёте, что астрономия не может обойтись без измерения углов.

3. Яков Перельман. *Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома*, 7-е изд. (М.-Л.: ГИТТЛ, 1950). Обязательно обратите внимание на эту книгу. В третьей главе разобрано много задач на измерение углов подручными средствами и подробно рассказано о простейших устройствах для измерения углов, в том числе о *посохе Якова* и о *грабельном угломере*.

Особо рекомендуем раздел «Определение величины данного угла без всяких измерений» (с. 138–140), где описан метод измерения углов, «предложенный в 1946 г. З. Рупейка из Каунаса». По-видимому, этот раздел был добавлен редактором седьмого издания книги Б.А. Кордемским. Сам Яков Перельман скончался в 1942 году в блокадном Ленинграде.

4. Александр Шень. *Геометрия в задачах* (М.: МЦНМО, 2017). Второй раздел этой книги как раз называется «Измерение углов». Там много интересных задач, над которыми стоит подумать. Среди них мы выделим задачу № 38.

Художник Мария Усеинова