XLII ТУРНИР ГОРОДОВ,
ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

11 и 25 октября 2020 года прошёл осенний тур XLII Турнира Городов. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. Учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [3]. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых – отмеченные точки?

2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что

а) [2] каждый побывал в полуфинале более одного раза;

б) [3] каждый побывал в финале.

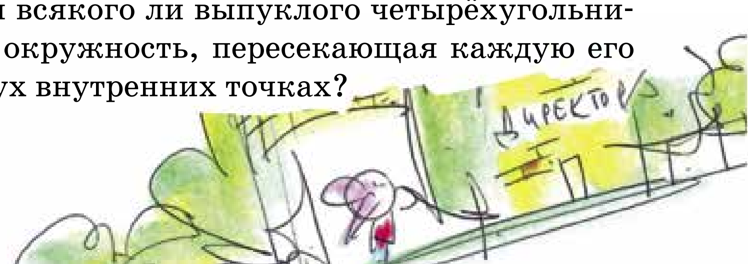
3 [5]. В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

4 [5]. Даны равносторонний треугольник со стороной d и точка P, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдутся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.

5 [5]. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

Сложный вариант

1 [4]. Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?



Авторы задач: **базовый вариант** – Сергей Дворянинов (1), Борис Френкин (2), Фёдор Ивлев (3), Александр Эвнин (4), Александр Грибалко (5);
сложный вариант – Александр Перепечко (1), Борис Френкин (2), Андрей Аржанцев (3), Александр Грибалко (4), Михаил Евдокимов (5), Михаил Святловский (6), Максим Дидин (7)

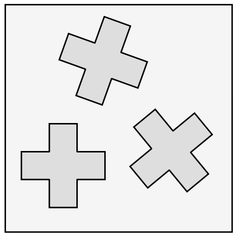
2 [7]. Назовём пару различных натуральных чисел *удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) – натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.)

3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было

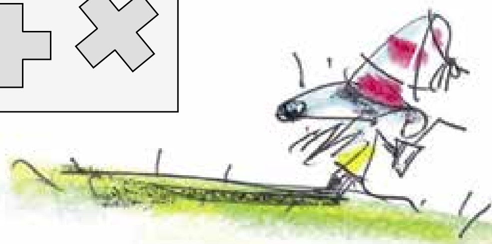
а) [3] хотя бы сто чисел 5;

б) **[4]** хотя бы сто чисел 10?

4 [7]. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов?



5 [8]. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?



6 [10]. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?

Художник Сергей Чуб

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что

а) **[6]** один из углов этого четырёхугольника не больше $60°$;

б) **[6]** один из углов этого четырёхугольника не меньше $120°$.