НАШ КОНКУРС, II тур («Квантик» № 10, 2020)

6. *За три весенних месяца некоторого года понедельников было меньше, чем четвергов. Чего было меньше за три летних месяца того же года – вторников или пятниц?*

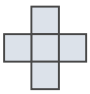
Ответ: вторников было меньше, чем пятниц.

В весенних месяцах (март, апрель и май) $31+30+31=92$ дня, и в летних месяцах (июнь, июль и август) тоже: $30+31+31=92$. Число 92 при делении на 7 даёт остаток 1. Значит, весна начинается и заканчивается одним и тем же днём недели. Именно этих дней недели весной на 1 больше, чем любых других. Тогда первым и последним днём весны в тот год был четверг, откуда первым летним днём была пятница. И аналогично, летом именно пятниц было на 1 больше, чем любых других дней недели – в частности, больше, чем вторников.

7. *Найдите все натуральные числа n, для которых $n^2 = n! + n$. (Напомним, что $n!$ – это произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ первых n натуральных чисел.)*

Ответ: $n=2$, $n=3$. Заметим, что $n=1$ не годится ($1 \neq 1+1$), а $n=2$ и $n=3$ подходят ($4 = 2+2$ и $9=6+3$). Пусть $n>3$. Поделим равенство $n^2=n!+n$ на n, получим: $n=(n-1)!+1$, откуда $n-1=(n-1)!$. Поделим на $n-1$, получим: $1=(n-2)!$, но при $n>3$ правая часть больше 1.

8. *Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой плоскости. Выигрывает тот, кто отметит пять клеток в виде креста (см. рисунок) своим значком. Всегда ли второй игрок может помешать первому выиграть?*



Ответ: да. Второй может действовать так: он разбивает всю плоскость на двуклеточные доминошки и на каждый ход первого в какую-то доминошку ставит нолик в ту же доминошку. Любой пятиклеточный крест обязательно накрывает какую-то доминошку целиком, так что его не удастся весь заполнить крестиками.

Попробуйте решить задачу для других фигур пентамино – например, когда первый стремится отметить полоску из 5 крестиков. (Подсказка: тут второй тоже может разбить плоскость на доминошки, но уже не как попало!)

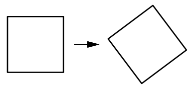
9. *а) Можно ли все натуральные числа окрасить в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал и произведение любых двух чисел одного цвета было числом того же цвета? б) А в семь цветов?*

Ответ: можно в обоих пунктах.

а) Например, покрасим нечётные числа синим, а среди чётных покрасим жёлтым делящиеся на 3, и зелёным – остальные.

б) Выберем 6 простых чисел, например: 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Все степени каждого из них покрасим в свой цвет: 2, 4, 8, 16, ... будут первого цвета; 3, 9, 27, ... – второго; ...; 13, 169, ... – шестого. Остальные числа покрасим в 7-й цвет. Проверьте, что такая раскраска подходит.

10. *Придумайте способ разрезать квадрат на части и передвинуть их, не поворачивая, так чтобы получился такой же, но повёрнутый квадрат (например, как на рисунке).*



Два квадрата, построенные на катетах прямоугольного треугольника, можно разрезать на части и сложить из них (передвигая, но не поворачивая части) квадрат на гипотенузе того же прямоугольного треугольника (рис. 1). Это – одно из доказательств теоремы Пифагора (в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы).

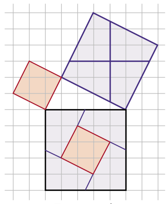


Рис. 1

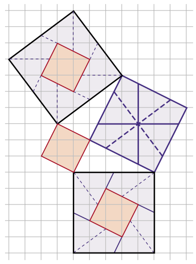


Рис. 2

Осталось применить это разрезание дважды (рис. 2). Обратите внимание, что приходится «наложить одно разрезание на другое» и резать квадрат не на 5, а на 9 частей) – и получится повёрнутый квадрат.

Любопытно, что если взять не квадрат, а равносторонний треугольник, то повернуть его, «ничего не поворачивая, а только разрезая и сдвигая», уже невозможно! Попробуйте это доказать или прочитайте решение в книге В. Г. Болтянского «Третья проблема Гильберта».

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ РИМСКИЕ ЦИФРЫ? («Квантик» № 11, 2020)

Первое равенство позволяет предположить, что точка обозначает какое-то число x, а второе – что $8x = S + 2x$, то есть $S = 6x$. Не противоречит ли это третьему равенству? Попробуем его записать: $3x \cdot 4x = x$, то есть $12x^2 = x$, откуда x равняется... $1/12$. Соответственно, $S = 1/2$ (тут можно ещё вспомнить приставку «семи-», означающую «полу-»).

Теперь ясно, почему эти «римские цифры» выглядят непривычно, – перед нами древнеримская система записи *дробей*. В то время одну двенадцатую называли *унцией* (и обозначали точкой). Получаем ответ:

$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$;

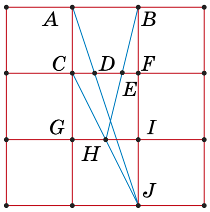
●●●● + ●●●●● = S●●●; S × ●●●● = ●●;

●● : ●●● = S●●; $S+S=1$ или $S:S=1$.

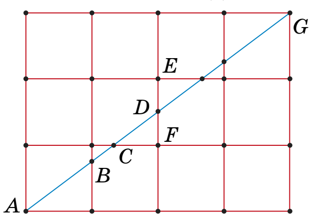
ЗАДАЧА О ГВОЗДЯХ И НИТКАХ

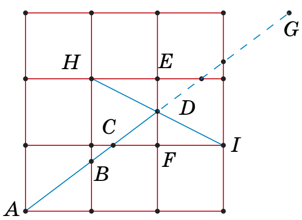
(«Квантик» № 11, 2020)

Нетрудно вбить два гвоздя на расстоянии 5 см, используя три нитки, если воспользоваться следующим фактом: $5=12-3-4=12-\frac{12}{4}-\frac{12}{3}$.



Иными словами, нам нужно отделить от стороны маленького квадратика треть с одной стороны и четверть – с другой. Посмотрим, как это можно сделать: для начала натянем ниточки AJ и CJ и вобьём гвозди D и H. Пользуясь подобием треугольников ADC и JDF, легко доказать, что CD составляет ровно треть от CF, или 4 см. Аналогично HI, отсекаемая ниткой CJ, равна половине GI. Наконец, используем последнюю, третью ниточку – натянем её между B и H и вобьём гвоздь в точке E. Заметим, что EF – средняя линия в треугольнике BHI, а значит, равняется половине HI, или половине половины (то есть четверти) GI. Получаем, что EF в точности равняется 3 см. Тогда $DE=CF-CD-EF=5$ см!





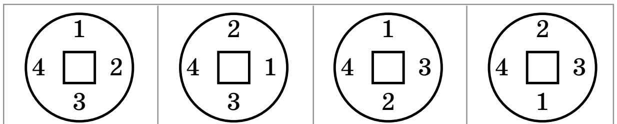
Но с двумя ниточками такой трюк не сработает. Что же делать? Посмотрим на то, как гипотенуза египетского треугольника (прямоугольного треугольника, стороны которого делятся в отношении 3:4:5) делится сеткой на части. Как можно видеть, отрезок AG делится на три равные части горизонтальными линиями и на четыре равные части – вертикальными. Значит, $AC=\frac{1}{3}AG$; $AB=\frac{1}{4}AG$; $BC=AC-AB=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)AG=\frac{1}{12}AG$. Поскольку $AG=5\cdot 12=60$ см, то $BC=5$ см. Но есть одна проблема: наше поле меньше по размерам. Воспользуемся тем, что AG делит EF пополам в точке D. Натянем нитку HI и вобьём гвоздь в точку D, после чего натянем нитку между A и D. После этого мы сможем вбить гвозди B и C, которые, как мы уже доказали, удалены друг от друга на 5 см!

КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ

Легко заметить, что во всех названиях есть слог *бао*, а на всех монетах слева – иероглиф 寶 или 寶. Шесть монет называются *тун-бао*, но нет знака, который бы на шести монетах находился на одном и том же месте (как ни составляй пары знаков обычного шрифта и шрифта печатей). Это означает, что порядок иероглифов на монете может различаться.

Можно начать рассуждать с другой стороны. Слог *юань* встречается семь раз, *тун* – шесть раз. Есть лишь один способ обеспечить это: предположить, что *тун* – это 通 = 通 (встречаются по три раза), *юань* – 元 (встречается пять раз) и какой-то из знаков, встречающихся два раза в шрифте печатей, то есть 元 или 聖, по сходству, скорее, первый (это соображение на самом деле не понадобится, формально см. ниже).

Слог *тун* встречается только в сочетании *тун-бао*, а соответствующие иероглифы находятся внизу или справа. Итак, есть четыре варианта порядка чтения иероглифов на монете:



сверху-справа-снизу-слева (по кругу)	справа-сверху-снизу-слева (зигзагом)	сверху-снизу-справа-слева (крестом)	снизу- сверху-справа-слева (петлёй)

Монета (9) имеет три уже известных иероглифа, это может быть (В) *сун-юань тун-бао*, читаемая крестом. Поэтому 宋 = *сун*.

Монеты (С) и (Н) называются одинаково: *шэн-сун юань-бао*. Монет с одинаковыми иероглифами нет, стало быть, на одной из этих монет – надпись шрифтом печатей, а на другой – обычная надпись. Это монета (10), опознаём её по иероглифу 宋; она читается по кругу, и мы узнаем ещё один иероглиф 聖 = *шэн*.

Итак, мы знаем, что монеты могут читаться по кругу или крестом. Будем далее исходить из того, что этих вариантов достаточно; к тому же они действительно кажутся наиболее естественными (если мы не сможем провести дальнейшие рассуждения без противоречий, нам придётся предположить существование ещё какого-то варианта, – но этого не произойдёт).

Выше мы обещали рассмотреть случай *юань* = 聖. Тогда (В) *сун-юань тун-бао* – это монета (2), читаемая крестом, *сун* = 紹, и мы пришли к противоречию: этот иероглиф больше не встречается; у нас не будет кандидатов на монету (С/Н) в варианте шрифта печатей.

Есть ещё одна возможность: монета (9) – это (I) *юань-ю тун-бао*, читаемая петлёй. Но тогда 宋 = *ю*, а слог *ю* встречается только один раз, и мы не можем объяснить 宋 на монете (10).

Итак, сейчас мы предполагаем, что есть два способа чтения – по кругу и крестом, и знаем иероглифы *бао* = 寶 = 寶, *юань* = 元 = 元, *тун* = 通 = 通, *сун* = 宋, *шэн* = 聖, а также соответствия монет (9) = (B), (10) = (C/H).

Далее, (7)=(I) (есть *бао*, *юань*, *тун*, других кандидатов нет), читается крестом, *ю* = 祐 (впрочем, это дальше не понадобится, это уникальный знак).

Теперь у нас остались:

- неопознанный вариант (С/Н) *шэн-сун юань-бао* в шрифте печатей,
- две пары монет с отличием на *юань* / *тун*:
  - (F) *чжи-хэ тун-бао* / (J) *чжи-хэ юань-бао*,
  - (К) *си-нин тун-бао* / (E) *си-нин юань-бао*,
- пара монет с отличием на втором слоге:
  - (A) *шао-си тун-бао* / (D) *шао-шэн тун-бао*,
- монета с двумя уникальными иероглифами: (G) *сянь-чунь юань-бао*.

Составим пары из монет с совпадающими символами в первой или второй позициях:

- (5) 嘉和 *тун-бао* (крестом) / (1) 嘉和 *юань-бао* (по кругу),
- (2) 紹聖 *тун-бао* (крестом) / (4) 聖宋 *юань-бао* (по кругу),
- (6) 紹熙 тун-бао (крестом) / (11) 熙寧 *юань-бао* (по кругу).

Иероглиф 熙 встречается в первой и второй позициях; таких слогов два: *шэн* и *си*, но *шэн* = 聖, стало быть, 熙 = *си*. Отсюда (6) = (A) *шао-си тун-бао*; *шао* = 紹. Второй член этой пары (11) = (E) *си-нин юань бао*, 寧 = *нин*.

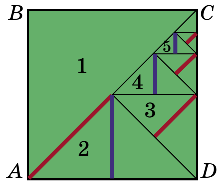
Теперь для пары (5)/(1) не остаётся вариантов, кроме как (F) *чжи-хэ тун-бао*/(J) *чжи-хэ юань-бао*, (5) = (F), (1) = (J), 嘉 = *чжи*, 和 = *хэ*.

Среди оставшихся монет замечаем 聖 на второй позиции в (2) (*тун-бао*, чтение крестом) и на первой позиции в (4) (*юань-бао*, чтение по кругу). Так же ведёт себя слог *шэн* в (D) *шао-шэн тун-бао* и (C/H) *шэн-сун юань бао*. Поэтому (2) = (D), (4) = (C/H), 聖 = 聖 = *шэн*, 宋 = 宋= *сун*, 紹 = 紹 = *шао*.

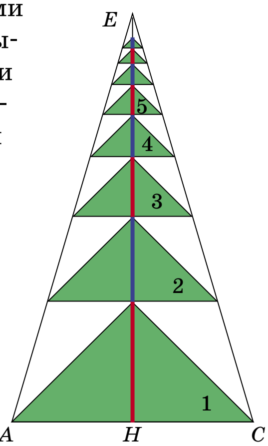
Ну и осталось очевидное: (3) = (К) *си-нин тун-бао* (по кругу), (8) = (G) *сянь-чунь юань-бао* (крестом); *си* = 熙 = 熙, *нин* = 寧 = 寧.

Если позволить себе опираться на сходство знаков, то можно сразу заметить, что монеты (C) и (H) называются одинаково: *шэн-сун юань-бао*, и поискать пару монет с самыми похожими иероглифами: это будут (4) и (10). Если эта гипотеза верна, то 元 = 元, и действительно, в совокупности эти знаки встречаются семь раз, как и слог *юань*; остаются 聖宋 = 聖宋, *шэн-сун*. Исходя из сходства знаков, 宋 = 宋= *сун*, 聖 = 聖 = *шэн*. Дальнейшие рассуждения с использованием сходства знаков *юань* = 元 = 元 и встречающегося шесть раз (три и три) *тун* = 通 = 通, а также *си* = 熙 = 熙, *шао* = 紹 = 紹, *нин* = 寧 = 寧 тоже оказываются проще, впрочем, ненамного.

«РАСТУЩАЯ» ЁЛОЧКА

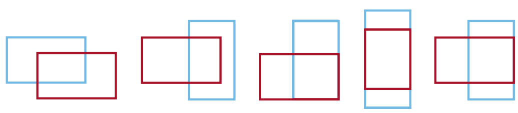


Ответ: $1+\sqrt{2}$. Данный квадрат, не нарушая условия задачи, можно разбить на треугольники иначе. Линии разрезов обозначены тонкой чёрной линией, цветными отрезками обозначены высоты треугольников. При таком разбиении максимальная высота EH ёлочки равна сумме длин синих и красных отрезков. Но сумма длин всех синих отрезков равна стороне квадрата, то есть 1, а сумма длин всех красных отрезков равна диагонали квадрата, то есть $\sqrt{2}$, откуда $EH = 1+\sqrt{2}$.



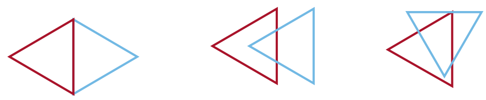
1 + 1 = 11

1. Не получится 7. Вот остальные примеры:

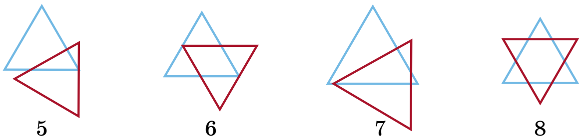


3 4 5 6 8

2. Примеры приведены на рисунках.

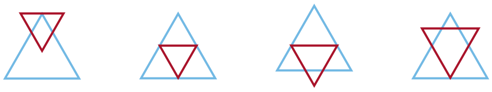


2 3 4



5 6 7 8

3. Первые два примера и последний подходят из задачи 2. Вот остальные рисунки.



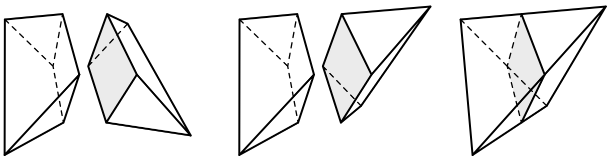
4 5 6 7

СФЕРИКОНЫ И ГЕКСАКОН

1. Пусть сторона квадрата равна a. Основание конуса – это круг с диаметром на диагонали квадрата. Значит, половина длины окружности основания равна $\pi\sqrt{2}a/2$, что равно длине дуги сектора. Радиус сектора равен a, значит, если α – угол сектора в градусах, то длина дуги сектора равна $2\pi a \cdot \alpha/360$. Откуда $\alpha = 90\sqrt{2}$ градусов.

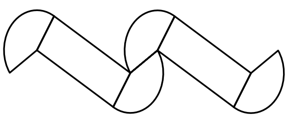
2. Перпендикуляр, опущенный из центра квадрата на его сторону, опирается на её середину. Поэтому перпендикуляр, опущенный из центра тетракона на плоскость, попадает в середину отрезка, по которому тетракон соприкасается с плоскостью. Такие средние линии секторов соединяются в зигзагообразную линию. Центр движется точно по такой же линии, если её поднять на высоту центра.

3. Выберем два ребра тетраэдра, которые не имеют общих вершин. Проведём в каждой грани среднюю линию, которая параллельна одному из выбранных рёбер. Эти линии образуют четырёхугольник. Противоположные стороны у него параллельны, так как средняя линия треугольника параллельна основанию. То есть, это параллелограмм. Проведём через него плоскость и разрежем по ней тетраэдр на две части. Они будут равны, поскольку если повернуть тетраэдр так, что выбранные рёбра поменяются местами, то и части поменяются местами. Подумайте, почему построенный параллелограмм – это на самом деле квадрат.



4. Если ось проходит через середину стороны.

5.



6. У правильного пятиугольника ось симметрии всегда проходит через середину некоторой стороны. Эта сторона при вращении превратится в круг. Когда мы разрежем фигуру, полученную вращением пятиугольника, этот круг разрежется на два полукруга. Когда мы повернём две половины сферикона относительно друг друга, два полукруга разъединятся. Полученный сферикон может катиться в одну сторону, пока не встанет на один полукруг.

7. Пронумеруем стороны многоугольника по порядку 1, 2, ..., $2n$. Пусть ось симметрии была так выбрана, что симметричны стороны 1 и $2n$, 2 и $2n-1$, ... Эти же пары сторон соединены ленточками (то есть половинками конусов, усечённых конусов и цилиндров) на поверхности одной половины сферикона. Другая половина повёрнута. Пусть она повёрнута в такую сторону, что ленточками соединены стороны 2 и 1, 3 и $2n$, 4 и $2n-1$, ... Тогда при катании сферикона мы будем проходить все стороны многоугольника в таком порядке: 1, $2n$, 3, $2n-2$, 5, $2n-4$, 7, $2n-6$, ..., $2n-3$, 4, $2n-1$, 2.

8. Три раза. Пронумеруем стороны числами 1, 2, ..., 12. Пусть на одной половине сферикона ленточками соединены стороны 1 и 12, 2 и 11, ..., 6 и 7, а на другой 4 и 3, 5 и 2, ..., 9 и 10. Ленточки на поверхности сферикона соединяются в три замкнутые ленты, которые проходят через стороны: 1, 12, 7, 6; 2, 11, 8, 5; 3, 10, 9, 4.

9. Бесконечный цилиндр. Конус.

10. Чтобы найти такие кривые, нужно нарисовать внутри тетракона и гексакона шар максимального радиуса и тогда точки, в которых шар коснётся, и будут составлять искомые кривые. Тетракон и гексакон состоят из конусов, поэтому искомые кривые состоят из дуг окружностей. Вспомним, что тетракон получается из двойного конуса. Двойной конус – это тоже крутикон! Он получается, если нарисовать на сфере две окружности. Разрежем сферу на две части – каждая окружность разрежется на две полуокружности, и повернём. Получится кривая из четырёх полуокружностей, напоминающая рисунок на мяче для бейсбола. Для гексакона ответ аналогичный, только будет 6 равных полуокружностей, концы которых делят экватор на 6 равных дуг.

ЁЛОЧКА – 2021

На наш взгляд, наиболее стройная ёлочка вот эта (см. рисунок). Хотя могут быть и иные мнения.