КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, IV тур («Квантик» № 10, 2020)

16. *Помимо приставок и суффиксов, в некоторых языках встречаются так называемые* **инфиксы** *– особые части слова, вставляющиеся внутрь корня. Например, в языке сумо (распространён в Никарагуа и Гондурасе):* suulu – *‘собака’,* suu**ma**lu – *‘твоя собака’ (инфикс* -ma- *со значением ‘твой’). Один лингвист в шутку предложил выделять в русском языке инфикс* -шма- *с усилительным значением. В каком слове?*

Речь идёт о слове ***колошматить***: этот глагол, означающий «бить что есть мочи», действительно можно считать образованным от глагола *колотить* при помощи инфикса *-шма-* с усилительным значением.

17. *По одной из версий, это знакомое всем с детства выражение первоначально означало нечто вроде «тот, кто нацарапал жалобу». Что это за выражение?*

Это выражение – ***ябеда-корябеда***. Словом *ябеда* сейчас обычно называют человека, который любит на всех жаловаться, но может оно обозначать и саму жалобу. Глагол *карябать* (встречается и написание *корябать*) означает «царапать». Гипотезу о происхождении дразнилки *ябеда-корябеда*, на которой основана задача, многие учёные считают убедительной.

18. *Бывает, что мы случайно переставляем звуки в словах. Один мальчик сказал другому, показывая на вывеску некоего магазина: «Видишь мертвецов?». Что было написано на вывеске?*

Там было написано **«Мир цветов»**: мальчик невольно поменял местами согласные *ц* и *т*.

19. *Какую одежду одна маленькая девочка назвала «юбка-коробка»? Представители какой профессии носят эту одежду?*

Эта одежда – балетная ***пачка***; такие пачки носят **балерины**. Видимо, у девочки слово *пачка* вызвало ассоциацию с чем-то вроде *пачки печенья*. Ну а *пачка печенья* и *коробка печенья* – это примерно одно и то же: неважно, в чём лежит печенье, лишь бы вкусное было.

20. *Сложив края мои, найди*
Рождённое от света.
Во мне же, сколько ни гляди,
Ни капли света нету.

Стихотворение написано «от лица» слова ***темень***. «Сложив края», то есть две первые и две последние буквы слова *темень*, получаем слово ***тень***: как известно, чтобы появилась тень, необходим источник яркого света. А там, где темень, действительно «ни капли света нету»: ведь *темень* – это синоним слова *мрак*.

НАШ КОНКУРС, III тур («Квантик» № 11, 2020)

11. *а) Можно ли составить из ненулевых цифр 1001-значное число с таким хитрым свойством: если вычеркнуть в нём несколько цифр (не обязательно подряд) так, чтобы осталось семизначное число, то это оставшееся число точно не будет делиться на 77?*

б) А если всегда должно оставаться шестизначное число, которое точно не будет делиться на 77?

Ответ: а) да; б) нет.

а) Возьмём число из одних единиц. После вычёркивания получится 1111111. Это число не делится на 11, тем более не делится на 77.

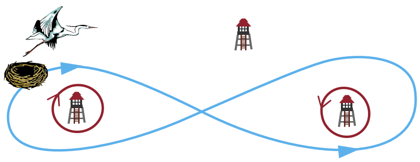
б) В 1001-значном числе найдутся 6 одинаковых цифр, скажем, a. Если вычеркнуть все цифры, кроме этих 6 одинаковых, получится $\overline{aaaaaa} = a \cdot 111111 = a \cdot 1001 \cdot 111 = a \cdot 77 \cdot 13 \cdot 111$.

12. *За день пребывания в Волшебной школе количество знаний увеличивается на столько процентов (по сравнению с предыдущим днём), какое в этот день число. Например, за 31 октября знаний станет больше на 31%, а за 1 ноября – только на 1%. Незнайка учился в Волшебной школе с 10 по 20 октября включительно, а Знайка – с 11 по 21 октября. У кого теперь больше знаний и на сколько процентов, если до Волшебной школы их знания были одинаковыми?*

Ответ: у Знайки, на 10%. При приросте, скажем, на $x\%$, знания умножаются на $1+\frac{x}{100}$. С 11 по 20 октября включительно знания Незнайки и Знайки возросли в одинаковое число раз. Но знания Незнайки ещё возросли 10 октября на 10%, то есть в 1,1 раз, а Знайки – 21 октября в 1,21 раз. Итого Знайка стал умнее Незнайки в $1{,}21/1{,}1 = 1{,}1$ раз, или на 10%.

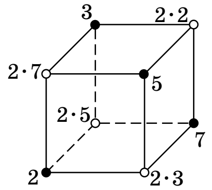
13. *Три орнитолога, каждый на своей башне, следят за одной цаплей. Орнитологи всё время смотрят прямо на цаплю, поворачиваясь вслед за ней. Утром цапля вылетела из гнезда на охоту и вечером вернулась обратно. Могло ли оказаться так, что в результате первый орнитолог сделал ровно один оборот вокруг себя по часовой стрелке, второй – против, а третий – вовсе не сделал ни одного полного оборота?*

Ответ: да, пример см. на рисунке.

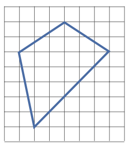


14. *Можно ли записать в каждой вершине куба натуральное число так, чтобы все 8 чисел были различны, но произведение чисел в вершинах каждой грани было одно и то же?*

Ответ: да. Раскрасим вершины, как на рисунке. Запишем в чёрных вершинах 4 различных простых числа, а в белых – удвоенные чёрные числа, лежащие напротив (по диагонали куба). Все числа будут разные, а произведения на гранях будут равны произведению взятых простых и ещё двух двоек.

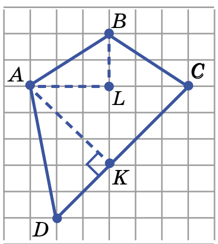


15. *а) На клетчатом листе нарисовали четырёхугольник с вершинами в узлах сетки (см. рисунок). Докажите, что у него один из углов в два раза больше другого.*



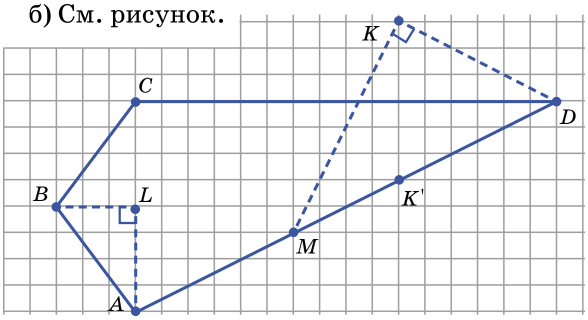
б) Нарисуйте на клетчатом листе выпуклый четырёхугольник с вершинами в узлах сетки, у которого один из углов в четыре раза больше другого.

а) Обозначим наш четырёхугольник $ABCD$ и отметим точки K и L, как на рисунке. Докажем, что угол B в два раза больше угла D.



Треугольники ADK и ABL прямоугольные, первый из них – увеличенный второй (катеты удлинились во столько раз, во сколько диагональ клетки больше её стороны). Значит, углы у них одни и те же, и углы ADK и ABL равны. Но угол ABL – половина угла ABC.

б) См. рисунок.



Докажем, что угол ABC в 4 раза больше угла ADC. Точки K и K' симметричны относительно CD, поэтому угол ADK в 2 раза больше угла ADC. Треугольники MDK и ABL прямоугольные, и первый из них – увеличенный второй, откуда получаем требуемое.

XLII ТУРНИР ГОРОДОВ («Квантик» № 12, 2020)

Осенний тур, 8 – 9 классы

Базовый вариант

1. Ответ: не может. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют 98 прямоугольных треугольников, их общее число равно количеству таких пар, умноженному на 98. Но 1000 не делится на 98.

2. Каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ партий. Так как за год играется 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3+1+1+$ $+1=6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырёх финалах было $2 \cdot 4 = 8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $3+3+1+$ $+1=8$ партий, что противоречит условию.

3. Ответ: при n, не кратном 4. *Стратегия*: оставлять в куче число камней, кратное 4: при n вида $4k+1$ взять один камень, при n вида $4k+2$ – два камня; при n вида $4k+3$ взять p камней, где p – простой делитель числа n вида $4q+3$ (он найдётся, иначе все простые делители n имеют вид $4m+1$, а произведение чисел такого вида имеет такой же вид, а не вид $4k+3$).

Противнику из кучи с числом камней, кратным 4, не удастся взять число камней, кратное 4 (оно не простое), поэтому начинающий и дальше сможет играть по стратегии.

Если же изначально число камней кратно 4, стратегией может воспользоваться второй.

4. Пусть A, B, C – вершины данного треугольника, $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$. Пусть F – образ точки P при повороте вокруг A на 60°, переводящем C в B. Тогда треугольник APF – равносторонний со стороной a, и отрезок PC переходит в отрезок FB при этом повороте, откуда $FB = PC = c$. При этом $AB = d$, $PB = b$, и, значит, треугольник APF вместе с точкой B образуют нужную конфигурацию.

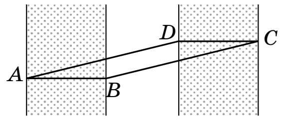
5. Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке справа. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым – два первых столбца.

2	6	1
3	4	5
8	7	

За первое взвешивание мы найдём строку, где должен быть похудевший слон, если он есть, а за второе – столбец. На их пересечении и будет похудевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто не похудел).

Сложный вариант

1. Ответ: нет. Возьмём параллелограмм $ABCD$, как на рисунке справа. Если бы окружность пересекла его стороны AB и CD, то её центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку AB и на каком-то перпендикуляре к отрезку CD. Но такие перпендикуляры не пересекаются.



2. Ответ: да, верно. Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу m. Тогда числа из этой пары – одной чётности, и их можно представить в виде $m+n$ и $m-n$, где n тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары – натуральное число, их произведение – полный квадрат: $m^2-n^2=$ $=k^2$, где k натуральное. Тогда $m^2-k^2=n^2$, откуда $m+k$ и $m-k$ – удачная пара с тем же средним арифметическим, причём $k\neq n$ (иначе $m^2=2n^2$, что невозможно в силу иррациональности $\sqrt{2}$).

3. а) Ответ: нет, не сможет. Пусть Вася действует так: если Петя назвал чётное число, Вася его и записывает, а если Петя назвал нечётное – записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечётное число (в частности, 5) лишь один раз – когда Петя впервые назвал нечётное число.

б) Ответ: да, сможет. Покажем, как Пете заставить Васю написать на доске число 10:

(1) Если сумма чисел на доске равна 0, Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.

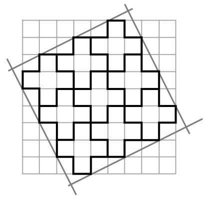
(2) Если сумма чисел на доске равна –5, Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).

(3) Если сумма чисел на доске равна 5, Петя называет число –10, и Вася либо пишет число –5 и попадает в ситуацию (1), либо пишет число –10 и попадает в ситуацию (2).

(4) Если сумма чисел на доске равна 10, Петя называет число –15, и Вася либо пишет число –15 и попадает в ситуацию (2), либо пишет число –5 и попадает в ситуацию (3).

Если на доске другая сумма, скажем n, Петя может назвать число $10-n$, и Вася либо напишет число 10, либо попадёт в ситуацию (4). Итак, имея любой набор чисел на доске, мы можем заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем заставить его написать 100 десяток.

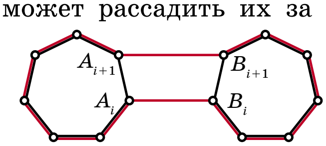
4. Ответ: можно. Расположим 9 крестов, как на рисунке справа, и опишем вокруг них квадрат. Этот квадрат состоит из 9 крестов (их суммарная площадь равна 45), 8 половинок прямоугольников 1×2 (их суммарная площадь равна 8) и 4 «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника 1×2 и половинки клетки, то есть его площадь не больше 1,5, откуда суммарная площадь уголков не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45+8+6=59$, что меньше 64. Значит, его можно уместить на шахматную доску, а с ним и 9 крестов.



5. Ответ: существуют. Заметим, что 3^3+4^3+ $+5^3=6^3$. Домножив это равенство на 2^3, получим $6^3+8^3+10^3=12^3$. Заменяя 6^3 на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3$. Домножив новое равенство на 2^3 и снова заменяя 6^3 на сумму трёх кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+$ $+20^3=24^3$. Действуя далее аналогично, мы сможем получить 99 кубов, дающих в сумме куб.

6. Ответ: при всех нечётных $n>1$. Обозначим через $A_1, A_2, \dots, A_n$ гномов за первым столиком, а через $B_1, B_2, \dots, B_n$ – за вторым столиком. Будем изображать гномов точками, а если два гнома дружат – соединять точки отрезком.

Случай нечётного n. Пусть $n=2k-1$. Стратегия за доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k}=B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать. Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину всех дружб, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k всё ещё дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол, как на рисунке: $A_i, B_i, B_{i-1}, \dots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.

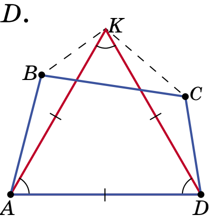


Случай чётного n. Вот стратегия злого волшебника. Пусть добрый волшебник подружил

$2n$ пар гномов: провёл $2n$ новых отрезков между точками-гномами. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым – в красный и синий. У $2n$ новых отрезков $4n$ концов, и тогда найдётся такой цвет – скажем, белый, – что из точек этого цвета выходит суммарно не больше n новых концов. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которых есть гном белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома – его старые соседи, и, рассаживая белых гномов, мы рассадим первый стол и замкнём цикл, а рассадить всех не получится.

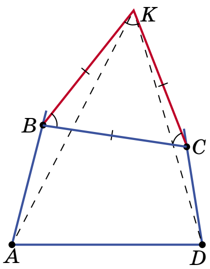
7. Пусть AD – наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше AD.

а) Пусть углы A и D оба больше $60°$. Построим на AD равносторонний треугольник AKD во внутреннюю сторону четырёхугольника. Стороны AK и DK выходят из A и D внутрь четырёхугольника, но точка K будет лежать вне (иначе $AB+BC+CD>AK+KD=2AD$, и тогда какие-то две стороны из AB, BC, CD в сумме больше AD, что не так по условию).



Тогда $\angle BKC>60°$, откуда в треугольнике BKC сторона BC не самая маленькая. Пусть она больше, например, чем BK. Тогда $AB+$ $+BC>AB+BK>AK=AD$ – противоречие.

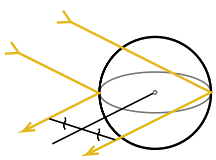
б) Пусть каждый из углов B и C меньше $120°$. Продлим лучи AB и DC, дополнительные углы будут больше $60°$. Построим на BC равносторонний треугольник BKC во внешнюю сторону четырёхугольника. Тогда угол AKD будет меньше $60°$ (стороны BK и CK «загибаются внутрь» от лучей), и, значит, в треугольнике AKD сторона AD не самая большая. Пусть она меньше, например, чем AK. Тогда $AD<AK<AB+BK=AB+BC$ – противоречие.



ОТРАЖЕНИЕ В ПУЗЫРЕ

(«Квантик» № 12, 2020)

Начнём с того, что изображение на мыльном пузыре не строго симметрично. Оно тем симметричнее, чем дальше от пузыря вы сами и отражающийся объект. Поэтому для простоты рассуждений будем считать, что отражающийся объект далёк и мы далеко. Это значит, что лучи, идущие от объекта (Солнца, например) к пузырю и от пузыря к глазу, можно считать параллельными. Почему мы видим два солнечных блика, симметричных относительно центра пузыря? Пузырь даёт два блика: отражения Солнца в ближней к нам выпуклой поверхности пузыря и в дальней вогнутой. Маленькие кусочки поверхности пузыря в его противоположных точках с большой точностью можно считать параллельными кусочками плоскости. И если одна отражает параллельные солнечные лучи в сторону нашего глаза, то же делает и вторая. Поэтому бликуют симметричные точки пузыря. Они расположены по разные стороны линии нашего взгляда, так что изображение получается перевёрнутым.



СТАЛЬНАЯ ЧЕЛЮСТЬ

• Когда заяц передвигается прыжками, следы задних лап оказываются впереди следов передних лап. Права Лиза – заяц побежал налево.

• Тёплый воздух от костра поднялся вверх и подтопил снег на ветвях ёлки. На ребят сверху могла закапать вода, а могли и комки снега с веток соскальзывать в костёр.

• Друзья привязали к удочке магнит и опустили в лунку. Стальная челюсть притянулась к магниту и её легко достали из воды.

СГИБАНИЯ БУМАГИ

История первая. Отрезки.

1. Ответ: периметр $a+b$, длина $c/2$.

2. Ответ: они равны.

3. Ответ: $(P-Q)/2$.

4. Периметр у ABC – сумма соседних сторон BX и BY прямоугольника, а у CDE– сумма соседних сторон DX и DY, эти суммы равны.

ФРАНСУА РАБЛЕ, ЖОРЖ САНД, АЛЕКСАНДР ДЮМА

Выдумана, конечно, история про Жорж Санд. В ней, по крайней мере, две нелепости: 1) играть, а тем более прекрасно, с длинными ногтями на шестиструнной гитаре невозможно; 2) Шопен, композитор французско-польского происхождения, не стал бы давать пьесе название «ногтюрн», похожее на русское «ноготь», но совершенно не похожее на это слово во французском и польском языках (ongle и paznokieć).

Впрочем, некоторые считают, что история с Рабле тоже выдумана, частично или полностью. Может быть. Однако внутренних противоречий, как в истории с Жорж Санд, в ней нет.