Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов,
Пётр Панов

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольник – основной объект геометрии, а может, и математики вообще. Собранные все вместе, треугольники образуют некоторое пространство – *Треугольный Мир*. Мы составим его подробную карту, побываем на окраинах этого мира и раскроем тайну его полюсов. Подготовку к большому путешествию начнём с простых измерений.

ИЗМЕРЕНИЯ

Нарисуйте на листе бумаги равносторонний треугольник с высотой 1 дециметр.

Отметьте внутри него точку, опустите из неё три перпендикуляра на стороны треугольника – на рисунке 1 они обозначены a, b, c – и подсчитайте их суммарную длину $a+b+c$ (в дециметрах). Проделайте несколько таких экспериментов, выбирая разные точки внутри треугольника, и заполните журнал измерений.

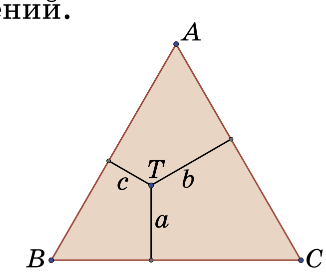

Рис. 1. Процесс измерения ставит в соответствие каждой точке T три числа a, b, c – длины отрезков, перпендикулярных сторонам треугольника

Журнал измерений

№	a	b	c	$a+b+c$
1				
2				
3				
4				
5				

Вы получите удивительный результат: $a+b+c$ всегда равно 1. Дело в том, что *в равностороннем треугольнике сумма перпендикуляров, опущенных из точки внутри треугольника на его стороны, равна высоте треугольника*.

Упражнение 1. Попробуйте доказать это.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Раз уж у нас получились три отрезка длины a, b и c, почему бы не попытаться составить из них треугольник с этими сторонами?

Упражнение 2. Можно ли составить треугольник из отрезков длины 1, 2, 4; 1, 2, 3; 2, 3, 4?

Оказывается, треугольник со сторонами a, b и c существует только в том случае, когда одновременно выполняются три *неравенства треугольника* $a < b+c$, $b < c+a$, $c < a+b$, то есть любая сторона треугольника меньше суммы двух других. Можно ограничиться одним неравенством, сказав: *бóльшая сторона треугольника меньше суммы двух других.*

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Для каких же точек T внутри ABC большее из чисел a, b, c меньше суммы двух других?

Разобьём наш треугольник ABC на четыре маленьких (рис. 2). Вершины среднего из них расположены в серединах сторон ABC. Только для точек внутри этого серединного треугольника, то есть для соответствующих им троек чисел a, b, c, выполняются все три неравенства $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$. Для остальных точек одно из неравенств точно нарушается: на рисунке указано, какое именно.

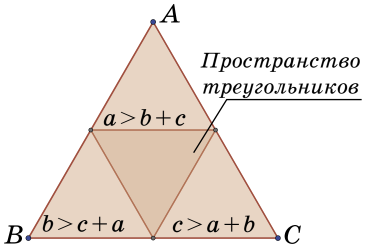

Рис. 2. Пространство треугольников

Упражнение 3. Взяв в каждом маленьком треугольнике хотя бы по одной точке, проверьте на примерах справедливость неравенств, указанных на рисунке 2.

Выходит, каждой точке T внутри серединного треугольника соответствуют три отрезка a, b, c, из которых можно сложить треугольник (с периметром 1). Вот почему мы дали серединному треугольнику на рисунке 2 название *Пространство треугольников*. Дальше мы будем называть его *Треугольным Миром*.

ПРИСТУПАЕМ К СОЗДАНИЮ КАРТЫ ТРЕУГОЛЬНОГО МИРА

Мы привыкли к тому, что географическая карта – цветная, на ней нанесена сетка из параллелей и меридианов и отмечены большие города и столицы.

Нанесём на карту Треугольного Мира первые пункты. Начнём с равностороннего треугольника периметра 1, в нём $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. Выберем ещё известный египетский треугольник со сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Сам треугольник, конечно, нельзя разместить на карте, но подобный ему со сторонами $a = \frac{3}{12}$, $b = \frac{4}{12}$, $c = \frac{5}{12}$, то есть $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, – уже можно. Добавим ещё третий пункт – равнобедренный треугольник со сторонами $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = \frac{4}{9}$. И вот первые наблю-

дения: равносторонний треугольник соответствует центру Треугольного Мира, равнобедренный треугольник со сторонами $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$ расположен близко к стороне AC и одинаково удалён от сторон AB и BC (рис. 3). Пойдём дальше.

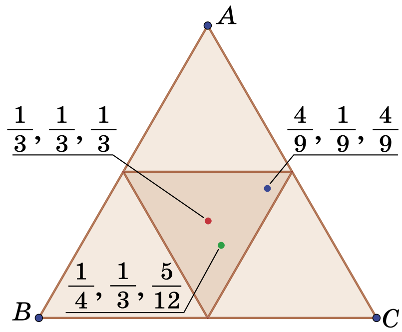

Рис. 3. Три пункта на карте Треугольного Мира

ПЕРЕСТАНОВКИ

Стороны треугольника можно записать в разном порядке. Задают ли эти записи (перестановки) одну и ту же точку на нашей карте или разные?

Упражнение 4. Сколько существует разных перестановок а) трёх различных чисел; б) трёх чисел, два из которых равны; в) трёх одинаковых чисел?

На рисунке 3 зелёная точка обозначает треугольник со сторонами $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$. На рисунке 4 зелёных точек шесть – они соответствуют всем возможным перестановкам чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$.

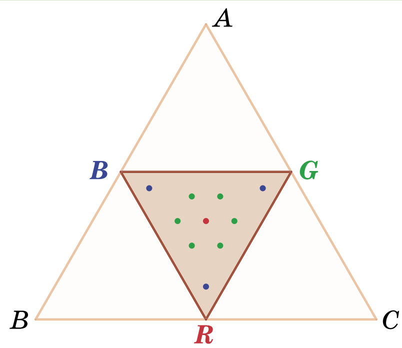

Рис. 4. На карте Треугольного Мира каждый треугольник, у которого все стороны разные, присутствует 6 раз, равнобедренный – 3 раза, а равносторонний – один

Для чисел $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, отвечающих равнобедренному треугольнику, есть три различные перестановки. Им соответствуют три синие точки на рисунке 4. Набор чисел $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ уникален. Итак, порядок, в котором перечислены длины сторон, на карте учитывается.

Взглянем ещё раз на рисунок 4. Там вершины внутреннего треугольника получили новые названия R, G, B, а внешний треугольник слегка поблёк – это мы готовимся к увеличению размеров нашей карты и к её раскраске. Далее мы не будем изображать внешний треугольник и сосредоточимся исключительно на нашей карте, а именно, на треугольнике RGB.

ТРИ ЧИСЛА – ЭТО ЦВЕТ

Для нас три числа a, b, c – это, прежде всего, треугольник, но три числа – это ещё и цвет. Мы имеем в виду *RGB*-палитру. В ней все цвета получаются смешением трёх основных – красного, зелёного и синего, – и цвет задаётся набором из трёх чисел (r, g, b), каждое из которых заключено в пределах от 0 до 1. Например, (0, 0, 0) – это чёрный, (1, 1, 1) – белый, а $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – оттенок серого. Сами красный, зелёный и синий – это, конечно же, (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Тройку чисел, задающую цвет, мы пишем в скобках, чтобы не путать её с точкой Треугольного Мира.

Было бы естественно раскрасить точку нашего Треугольного Мира, отвечающую числам a, b, c, тем же самым цветом (a, b, c). Но такая раскраска, к сожалению, малоконтрастная и недостаточно яркая. Вот если её рассчитать как ($1 - 2a$, $1 - 2b$, $1 - 2c$), то всё встаёт на свои места и, главное, вершины R, G, B приобретают свои законные цвета (рис. 5).

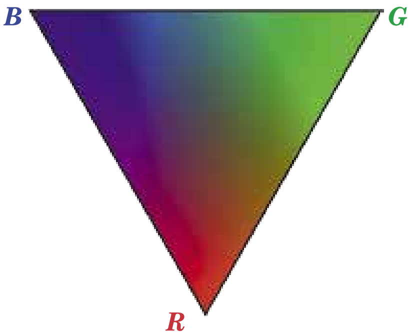

Рис. 5. Раскраска треугольного мира

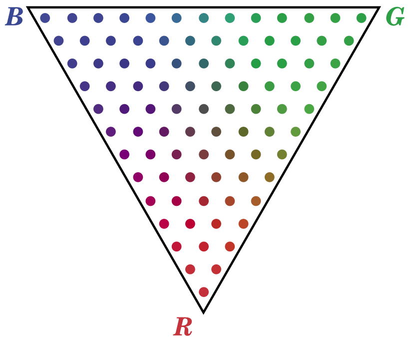

Рис. 6. Сеть точек, равномерно заполняющая Треугольный Мир

Упражнение 5. Рассчитайте, каким *RGB*-цветом раскрашен центр Треугольного Мира.

ЕЩЁ ДВЕ КАРТЫ

Разные типы карт расширяют наши представления об окружающем мире. Вот карта, на которой обозначена сеть точек, равномерно заполняющая наш Треугольный Мир (рис. 6).

Упражнение 6. Найдите на рисунке 6 центр Треугольного Мира и проверьте решение упражнения 5.

А на рисунке 7 цветные точки заменены маленькими треугольниками, которым они соответствуют.

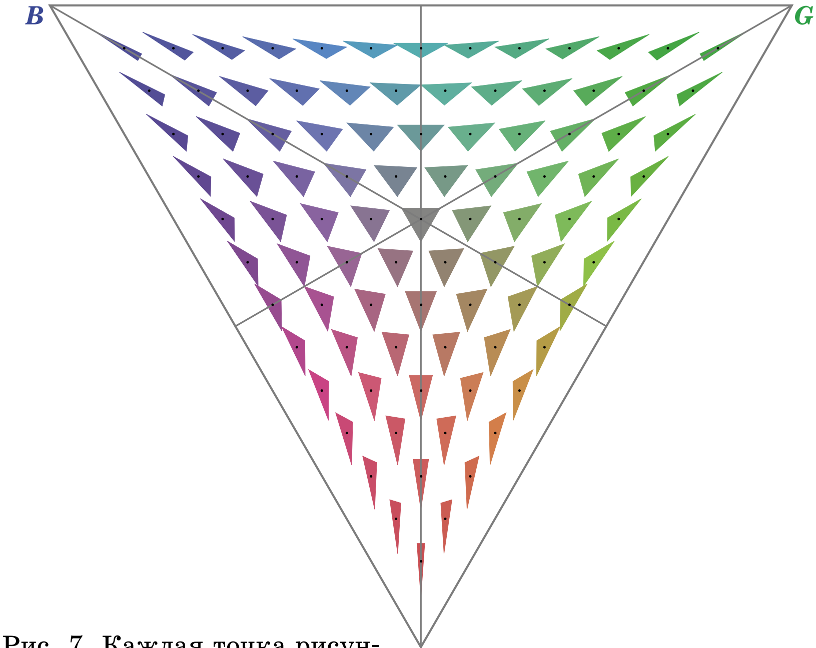

Рис. 7. Каждая точка рисунка 6 заменена треугольником

Не правда ли, эти треугольники похожи на маленькие магнитные стрелки с тремя концами, указывающими на вершины треугольника ***RGB***?

На этом мы временно прерываем наше изложение. Нам ещё предстоит путешествие к отдалённым окраинам Треугольного Мира и к его полюсам, тайну которых мы попытаемся раскрыть.

А пока посмотрите картинки в большом тексте Кая Беренда «Введение в алгебраические стеки» (K. Behrend, Introduction to Algebraic Stacks[1]). В нём подробно изучаются многочисленные Треугольные Миры. Наш Треугольный Мир фигурирует там под названиями $\mathscr{N}$ или $\bar{\mathscr{N}}$. Рекомендуем первые 70 страниц, где содержится множество картинок. Одну из них мы воспроизвели на рисунке 7, слегка улучшив её.

Ещё одно изображение (рис. 6) мы взяли из статьи П. Панова «О геометрических медианах треугольников»[2]. Там тоже много цветных картинок!

До встречи в следующем номере журнала.

Продолжение следует

[1] kvan.tk/stacks
[2] kvan.tk/treugmir

Художник Мария Усеинова