

ЛЮБОЙ НЕ ВСЯКИЙ

Мозг насекомых совсем не годится для вычислений. Немногочисленные и весьма ненадёжные регистры, никакого распараллеливания и кэша, от силы 4-битная адресация оперативной памяти. Но вопреки всему этому таракан Кузька вычислял. Чтобы компенсировать несовершенство мозга, он использовал всевозможные ухищрения, приёмы счёта на пальцах (точнее, на лапах), правила сокращённого умножения и разнообразные вычислительные фокусы. Расчёты были чрезвычайно сложные и утомительные. Кузька шевелил всеми шестью лапами, наклонялся то вправо, то влево, странно переворачивался, иногда хаотически бегал по Ам-Бару и делал на полу какие-то пометки кусочком мела.

Со стороны всё это выглядело как ритуальный языческий танец. Бусенька, Горгулий и Огрыза заворожённо смотрели на это зрелище.

– Хотя позы всё время повторяются, – заметила Бусенька, – не похоже, что движения периодические.

– Во всяком случае, если период и есть, то очень большой, – подтвердила Огрыза.

– Но каждая поза хотя бы один раз повторилась, – уточнил Горгулий.

Кузька, как было видно, сильно утомился.

– Готово, – тяжёло вздохнув, наконец сказал он. – Получилось!

– Что получилось?

– Я вывел совершенно новый признак делимости! Вы такого ещё не видели.

– Позволю себе немного усомниться, – вежливо сказал Горгулий. – Про признаки делимости я знаю всё!

– Тогда приготовься расширить свой кругозор, – сказал Кузька, театрально поклонившись. – Вашему вниманию предлагается простой, изящный и очень эффективный признак делимости числа 403!

– На 403, ты хотел сказать? – переспросил Горгулий с некоторым любопытством.

– Нет, не «на»! Просто признак делимости числа 403! Это... это фантастическая вещь! Обычно вы берёте

число x и с помощью признака проверяете, делится ли x , например, на 5 или на 11. А с помощью моего признака можно проверить, делится ли число 403 на x !

– И как же это сделать? – нетерпеливо спросила Огрыза.

– Число 403 делится на двузначное число x в том и только том случае, когда сумма квадратов цифр числа x равна 10, – гордо сказал Кузька.

Зрители некоторое время переваривали сказанное, а потом раздались бурные аплодисменты.

– Молодец, Кузька, – похвалила Огрыза.

– Ну как кругозор? – спросила Бусенька Горгулия. – Расширился?

– Спасибо, очень, – ответил Горгулий. – Никогда в жизни не видел ничего похожего. Я потрясён до глубины души. Но особенно меня восхитило то балетно-акробатическое представление, с помощью которого ты вывел этот признак.

– Да, это было непросто, – согласился Кузька. – К тому же вы всё время шептались, пока я считал, а это, знаете ли, сильно мешает.

– Мы восхищались, – пояснила Бусенька, – а кроме того, мы обсуждали, периодична ли последовательность твоих движений.

– Какая-какая последовательность?

– Рассмотрим последовательность твоих поз. Обозначим её x_n . Например, как я помню,

$$x_1 = \text{рис. 1}, \quad x_2 = \text{рис. 2}, \quad x_3 = \text{рис. 3}, \quad \dots$$

Я заметила, что твои позы всё время повторяются, то есть, попросту говоря,

$$\forall k \exists n \quad x_k = x_{k+n}.$$

– Что это за иероглифы? – спросил Кузька.

– Это *кванторы*. « \forall » читается «для любого», «для каждого», « \exists » – «существует», «найдётся». А вся фраза читается так: «для любого числа k найдётся такое число n , что $x_k = x_{k+n}$ ».

– И что означает эта абракадабра?

– Ну как что? Возьмём любое число k ...

– Любое – это какое именно? И где мы его возьмём? – недопонял Кузька.





– Да хоть бы у меня в ящике, – сказала Огрыза, – там целая куча любых чисел. Вот, пожалуйста. – Огрыза достала из ящика зелёную коробочку, к которой был сверху прикреплён небольшой конвертик. Оторвав конверт, она протянула его Кузьке.

– Посмотрим, – с интересом сказал Кузька, – что тут у нас... 31! Значит, 31 – это любое число??

– Не то чтобы совсем любое... Но во всяком случае одно из любых! Для примера можно взять и 31, но и все другие числа тоже взять стоило бы.

– Разве можно взять все числа?

– Мы возьмём одно число, обозначим его k и будем строить рассуждения, не используя никаких особых свойств числа k . Тогда наше рассуждение подойдёт и для других чисел.

– То есть если хочу, я могу взять $k = 31$, но я при этом не должен пользоваться тем, что это именно 31?

– Да, – сказал Горгулий, – например, не надо пользоваться тем, что сумма квадратов цифр этого числа равна 10.

– Как-то всё очень туманно. Ладно. Что там дальше? «Найдётся такое число $n...$ » – процитировал Кузька. – Где же это оно найдётся??

– Вот здесь, в зелёной коробочке, – сказала Огрыза и протянула её Кузьке.

– Это точно то самое число? – недоверил Кузька.

– Именно, – подтвердила Огрыза, – коробочка прилагалась к конверту с числом k .

– Ладно, посмотрим. – И Кузька аккуратно открыл коробочку. Число тут же выскочило из коробочки, спрыгнуло на пол и, смешно шевеля многочисленными тонкими лапами, добежало до стены и спряталось под плинтусом.

– Ой, – сказал Кузька, – вы заметили, что это было за число?

– Я – нет, – сказал Горгулий.

– И я – нет, – сказала Бусенька.

– Как же мы воспользуемся этим числом, если не знаем, чему оно равно?

– А зачем нам знать? Главное – что число существует, – сказала Бусенька.

– Да где же оно существует?

– Как где? Раньше оно существовало в коробочке. А теперь под плинтусом! Оно там существует, но мы не знаем, чему оно равно. Кроме того, имей в виду, что это число n годится только для $k = 31$. Если же взять другое k , число n окажется, скорее всего, другим.

– Оно живёт в другой коробочке, – догадался Кузька. – А разве нам важно, что для другого k число n будет другое, ведь мы всё равно не знаем, чему оно равно?

– Всё-таки полезно это себе представлять. Например, если бы это n было одним и тем же для всех k , то мы могли бы утверждать, что последовательность периодична, то есть что

$$\exists n \forall k \quad x_k = x_{k+n}.$$

– По сравнению с первой фразой всего два слова переставили, – заметил Кузька. – «У каждого таракана существует привычка шевелить усами» или «Существует привычка: каждый таракан шевелит усами». Какая разница?

– Ну не надо всё так примитивизировать. Наши два утверждения совершенно различны, – сказала Бусенька. – Да ты и сам можешь это проверить.

– Я?? Проверить? Я маленькое беззащитное насекомое, за что мне такие муки... – застонал Кузька, но, не доныв до конца, вдруг бодро встопорщил усы и заявил: – А вот и проверю!

Утверждение 1. $\forall k \exists n \quad x_k = x_{k+n}$. Значит, если мы берём любое k , например 31, то у Огрызы в конвертике найдётся такое число n , что поза x_{31} совпадает с позой x_{31+n} . То есть поза x_{31} повторяется! Причём это верно для любого k , а не только для 31. Значит, все позы всё время повторяются!

Утверждение 2. $\exists n \forall k \quad x_k = x_{k+n}$. Существует n , правда, мы не знаем какое, оно сбежало под плинтус, и вот для этого n при всех k поза x_k совпадает с позой x_{k+n} . Значит, и в этом случае все позы всё время повторяются!

А что, если мы поставим другие кванторы? Например, *утверждение 3:* $\forall k \forall n \quad x_k = x_{k+n}$. Что же это значит? Какое k ни возьми и какое n ни выбери, поза x_k совпадает с позой x_{k+n} . То есть опять x_k , а это любая поза, обязательно повторится.





Бусенька, Горгулий и Огрыза изумлённо смотрели на Кузьку. Кузьку несло.

– Придумали наукообразность, крЮки-закорюки, а суть-то одна и та же! Ну-ка, а если поменять местами кванторы в последней фразе, что получится?

Утверждение 4: $\forall n \forall k \ x_k = x_{k+n}$. Это значит...

– Но два подряд идущих квантора «для любого» всегда можно переставить местами! – попыталась образумить его Огрыза. – Получится то же самое.

– В любом подвале у каждой мыши есть запасы сыра. Правда?

– Разумеется, – согласилась Огрыза.

– Переставляем: у каждой мыши в любом подвале есть запасы сыра? Например, в подвале Злобнопотамма есть только сейф. Ты что – хранишь в нём сыр?

– Нет, – смутилась Огрыза, – сыр слишком сильно пахнет. Злобнопотам сразу бы заметил.

– Вот то-то! – и Кузька укоризненно посмотрел на окружающих. – И из-за такой ерунды мы чуть было не утратили мой замечательный признак делимости! Вот что я вам скажу: нам, насекомым, кванторы не нужны! Ненавижу кванторы!

На этой высокой эмоциональной ноте Кузька, недовозмутившись как следует, неожиданно зевнул, прислонился к стенке и отключился.

– Переутомили малыша, – неодобрительно сказала Огрыза. – Два квантора в его голову еле-еле влезают, да и то ненадолго.

Бусенька принесла откуда-то клеверный листик и положила Кузьке под голову.

– А что это были за удивительные коробочки и конвертики? – спросил Горгулий Огрызу.

– А, это... Вечером я провожу здесь, в Ам-Баре, беспроигрышную лотерею. Это один из призов, его должен был выиграть билет номер 31. Многоножка симфила: 24 ноги, трахейная дыхательная система – прямо мустанг!

– Да, классная зверюга, – согласился Горгулий. – Только при чём тут многоножки?

– Ни при чём. Но роль числа n она сыграла совершенно гениально!