

Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов,
Пётр Панов

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Окончание. Начало в «Квантике» № 1 и № 2, 2021

А теперь двинемся к границам и полюсам Треугольного Мира. При этом постоянно будем следить за треугольниками, мимо которых проходим.



Точка, где небо касается Земли, – исследователь на границе Мира. «Гравюра Фламариона», Википедия

РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Особое место в Треугольном Море занимают равнобедренные треугольники, нанизанные на его экваторы как позвонки (рис. 12).

Определение. *Равнобедренный треугольник – это треугольник с двумя равными сторонами (рис. 11).*

Теорема. *В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Если в треугольнике два угла равны, то против них лежат равные стороны и треугольник равнобедренный.*

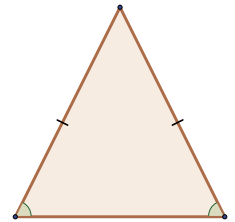


Рис. 11.
Равнобедренный
треугольник

В НАПРАВЛЕНИИ ГРАНИЦЫ

Что происходит с нарисованными на карте треугольниками по мере приближения к границе (движение вдоль первой стрелки на рисунке 12)?



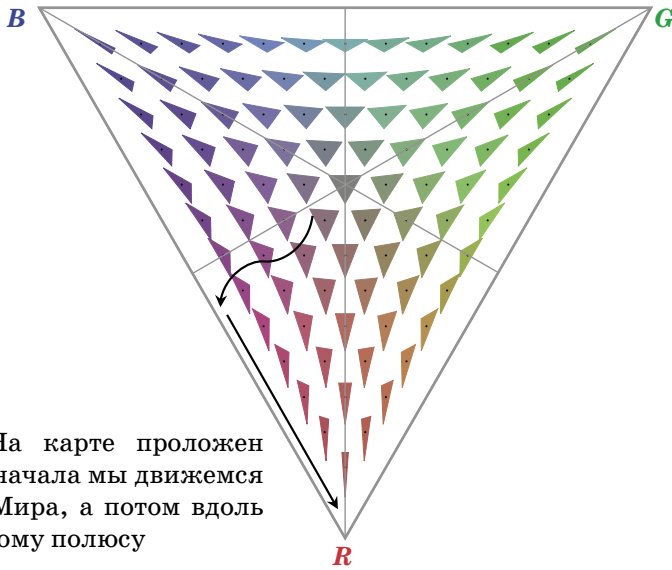


Рис. 12. На карте проложен маршрут: сначала мы движемся к границе Мира, а потом вдоль неё к Красному полюсу

Ответ очевиден: они *сплющиваются* и на самой границе превращаются в отрезок с отмеченной на нём точкой – в *сплюснутый* треугольник (рис. 13).

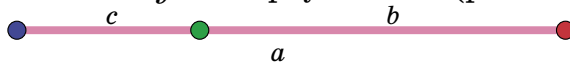


Рис. 13. Сплюснутый треугольник, $a = b + c$

Для сплюснутого треугольника неравенство треугольника превращается в равенство. В нём большая сторона равна сумме двух других: $a = b + c$.

Упражнение 12. Чему равны углы сплюснутого треугольника на рисунке 13?

УГЛЫ РАВНЫ, РАВНЫ ЛИ СТОРОНЫ?

С теоремой о равнобедренном треугольнике на границе Треугольного Мира нас ждёт сюрприз. Наверное, вы догадались, что у сплюснутого треугольника на рисунке 13 один угол (зелёный) равен 180° , а остальные два – по 0° . Но против этих двух равных нулевых углов лежат две неравные стороны $b \neq c$.

Выходит, вторая часть теоремы неверна? К счастью, математики давно разработали нужную теорию – *анализ бесконечно малых*. На нашем маршруте мы шли мимо треугольников, у которых можно отметить свои синий и красный углы. При подходе к границе и синие, и красные углы постепенно «превращаются» в нулевые, но делают это не одинаково. Вычислив в каждом треугольнике отношение синего угла к красному, мы увидим: пока эти углы ещё не стали нулями,





но уже практически «бесконечно малы», их отношение не отличить от b/c . С этой точки зрения, условно будем считать, что в сплюснутом треугольнике синий и красный углы относятся друг к другу как b/c .

Так бесконечно малые спасают теорему о равнобедренном треугольнике: нулевые углы (рис. 13) не равны друг другу с точки зрения их отношения! Они будут равными лишь для равнобедренного сплюснутого треугольника, где $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$.

Упражнение 13. Где расположен этот треугольник на карте (это недалеко от места нашего выхода на границу)?

Но продолжим наш маршрут.

К ПОЛЮСУ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

По мере приближения к Красному полюсу (вдоль второй стрелки) длины сторон a и b выравниваются, сторона c уменьшается, а две вершины сплюснутого треугольника (зелёная и синяя) сближаются (рис. 12). В итоге полюс предстаёт перед нами равнобедренным треугольником со сторонами $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

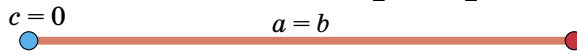


Рис. 14. Треугольник, представляющий Красный полюс. Угол между a и b равен 0° . А два других угла?

ТАЙНА КРАСНОГО ПОЛЮСА

Мы зашли в Красный полюс вдоль границы Треугольного Мира. Все треугольники, мимо которых мы проходили, были сплюснутыми и все имели углы 0° , 180° и 0° . Менялись только длины их сторон. С этой точки зрения углы полюсного сплюснутого треугольника (рис. 14) тоже должны быть 180° , 0° и 0° .

Но если входить в Красный полюс вдоль экватора, то у полюсного треугольника стороны будут те же самые $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 , а вот углы будут 90° , 90° и 0° . Тот же треугольник с углами 90° , 90° и 0° мы получим, входя в полюс вдоль меридиана, соответствующего 90° .

И вообще, входя вдоль меридиана, отвечающего углу α° , мы увидим на полюсе треугольник со сторонами $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 и углами α° , $180^\circ - \alpha^\circ$, 0° . Значит, мы не можем приписать двум нашим углам какие-то определённые значения, а получаем на Красном полюсе целое семейство сплюснутых треугольников (рис. 15). И то же самое – на остальных полюсах.

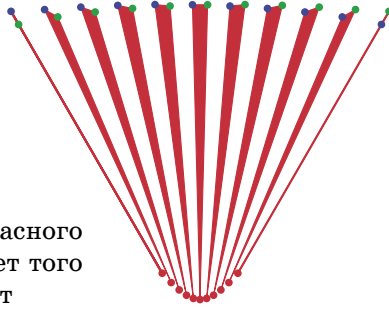


Рис. 15. Треугольники вблизи Красного полюса, вершины окрашены в цвет того полюса, на который они указывают

НА ПОЛЮСЕ: СТОРОНЫ РАВНЫ, УГЛЫ НЕТ

Итак, Красный полюс вмещает целое семейство треугольников с равными сторонами $a = b = \frac{1}{2}$, углы против которых не равны между собой. И неверна первая часть теоремы о равнобедренном треугольнике.

В этот раз мы спасём теорему, применив другой математический трюк: превратим её в определение.

Определение. *Треугольник – равнобедренный, если в нём есть две равные стороны и два равных угла, причём равные углы лежат против равных сторон, а равные стороны – против равных углов.*

Замечание. Среди сплюснутых треугольников есть два типа равнобедренных – с двумя углами 0° и с двумя углами 90° . Равнобедренные треугольники второго типа расположены в полюсах Треугольного Мира.

Упражнение 14. С помощью нашего нового Определения равнобедренного треугольника докажите ранее сформулированную Теорему о равнобедренном треугольнике.

Наше путешествие завершено, но история Треугольного Мира на этом не заканчивается.

ПОСЛЕСЛОВИЕ: ТРЕУГОЛЬНЫЙ МИР II

Треугольный Мир возник благодаря нескольким измерениям внутри правильного треугольника.

Предлагаем вам провести новую серию измерений. Нарисуйте любой треугольник. Измерьте транспортом его углы α , β , γ и вычислите их сумму $\alpha + \beta + \gamma$. Сделайте пять экспериментов, рисуя каждый раз новый треугольник, и заполните журнал измерений. Вы получите удивительный результат! Попробуйте на его основе построить новый Треугольный Мир II.

Журнал измерений

№	α	β	γ	$\alpha + \beta + \gamma$
1				
2				
3				
4				
5				

Художник Мария Усеинова

