НАШ КОНКУРС, V тур («Квантик» № 1, 2021)

21. *Слот-машина устроена так: нажимаешь на рычаг, а она случайно выбирает цифру от* 0 *до* 9 *на каждом из трёх барабанов. Если выпали три одинаковые цифры, машина выдаёт* 5000 *рублей, нажатие на рычаг стоит* 100 *рублей. Но машина сломалась: после выпадения* 000 *цифры на первом барабане стали выпадать по циклу через* 1 (0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, ...), *на втором – через* 2 (0, 3, 6, 9, 2, ...), *на третьем – через* 3 (0, 4, 8, 2, ...). *Выгодно ли это фирме, поставившей машину?*

Ответ: невыгодно. После 000 на первом и третьем барабанах будет выпадать 0 каждые 5 нажатий на рычаг, а на втором – каждые 10. Значит, выигрыш будет выпадать как минимум каждые 10 нажатий. За эти 10 нажатий фирма получает $100 \cdot 10 = 1000$ руб., а отдаёт 5000. До поломки выигрыш выпадал раз в 100 нажатий, и фирма, отдавая 5000, получала $100 \cdot 100 = 10000$ руб.

22. *а) В дачном посёлке 36 домиков, соединённых дорожками (рис. 1). Длина каждой дорожки 100 м. Когда в домике заводят кошку, мыши убегают из него и из всех домиков, до которых от него не более 200 м (длина пути считается вдоль дорожек). В каком наименьшем количестве домиков надо завести кошек, чтобы мыши полностью покинули посёлок? б) Решите ту же задачу, если домиков 38 и они расположены как на рисунке 2.*

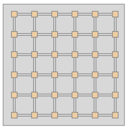


Рис. 1

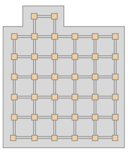
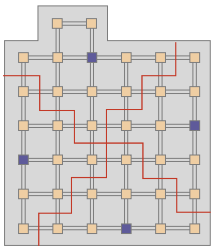


Рис. 2

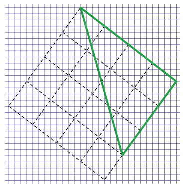
Ответ: а) 4; б) 4. Рассмотрим четыре домика в углах «большого квадрата» 500 м × 500 м. Кошка ни из какого домика не может «достать» одновременно до двух из этих четырёх домиков (ведь радиус действия кошки не более 200 м). А четырёх кошек для изгнания мышей из всех домиков хватит, см. рисунок (домики с кошками отмечены синим, красные линии разделяют «зоны ответственности» разных кошек).



23. *Рома суммировал подряд идущие натуральные числа, начиная с 1, а Поля умножала подряд идущие натуральные числа, тоже начиная с 1. Среди сумм Ромы и произведений Поли есть равные числа, например:* $1+2+3=1\cdot2\cdot3$. *А может ли ещё какая-то сумма у Ромы оказаться равной какому-то произведению у Поли?*

Ответ: да, $1+2+3+\ldots+15=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

24. *Нетрудно нарисовать на клетчатой бумаге треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах – например, прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5. А можно ли нарисовать треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах так, чтобы ни одна его сторона не проходила по линиям сетки?*



Ответ: можно, см. пример на рисунке.

25. *Требуется записать по кругу все натуральные числа от 1 до n в таком порядке, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом. Можно ли это сделать, если: а)* $n=2021$; *б)* $n=2022$?

Ответы: а) нельзя; б) можно.

а) Убедимся, что при любой расстановке чисел от 1 до 2021 по кругу найдутся два соседних числа, дающих в сумме составное число.

Достаточно найти соседние нечётные числа (их сумма не меньше $1+3=4$ и чётна, такое число составное). Но у нас 1011 нечётных чисел, а чётных 1010 – меньше, поэтому за каким-то нечётным числом по часовой стрелке стоит нечётное.

б) Заметим, что 2027 и 2029 – простые числа, отличающиеся на 2 (их называют «близнецами»). Напишем по кругу по часовой стрелке в порядке возрастания нечётные числа от 5 до 2021, а между ними напишем по часовой стрелке в порядке убывания чётные числа от 2022 до 6 (легко убедиться, что этих чётных и нечётных чисел поровну). Получится такая «цепочка»:

5 2022 7 2020 9 2018 ... 2019 8 2021 6

В этой цепочке сумма каждых двух соседних чисел попеременно равна то 2027, то 2029 – то есть простым числам. И мы использовали все натуральные числа от 5 до 2022. Осталось как-то втиснуть числа от 1 до 4 между крайними числами цепочки (то есть, 5 и 6), дабы «круг замкнулся». Это несложно: ... 5 2 3 4 1 6 ...

ЛЮБОЙ НЕ ВСЯКИЙ («Квантик» № 2, 2021)

Кузькин признак делимости выполняется по той причине, что двузначное число, у которого сумма квадратов цифр равна 10 – это либо 13, либо 31. Оба этих числа – делители 403.

Два последовательных квантора «для любого» можно переставлять, когда переменные, задаваемые этими кванторами, принадлежат независимым множествам. Кузькина фраза «В любом подвале у каждой мыши есть запасы сыра» относится к воображаемому «идеальному» миру, населённому «правильными» мышами. В нашем представлении мышь любит сыр и готова делать запасы сыра; поэтому мы готовы согласиться с этой фразой, считая, что в идеальном мире мыши так и поступают. Но фраза содержит подтекст, не присущий стандартным математическим формулировкам: на самом деле мы интерпретируем её не как фразу «Для любого подвала и для любой мыши верно, что...», а как «Для любого подвала и для каждой мыши в этом подвале верно, что...». То есть объект, управляемый вторым квантором, выбирается из множества, определяемого объектом первого квантора. После перестановки мы теряем эту связь, и фразу «У каждой мыши в любом подвале есть запасы сыра» понимаем как «Для совершенно любой мыши и любого подвала верно, что...». То есть подтасовка в том, что подвал теперь уже не связан с мышью, и первый квантор выбирает мышь из множества всех мышей, в том числе, не имеющих отношения к упомянутому далее подвалу. Поэтому Кузькины действия нельзя называть перестановкой кванторов.

СНЕГ, ЛЁД, ВОДА И ЛЫЖИ

(«Квантик» № 2, 2021)

1. Нужно как можно более охлаждённый снег положить в термос. Лучше ещё и в одеяло закутать для надёжности. И тепло, и холод можно сохранять одними и теми же способами.

2. В воздухе всегда есть немного водяного пара. Но количество пара, которое в него «помещается», зависит от температуры. В холодный воздух пара «влезает» меньше. Поэтому при остывании воздуха (например, вечером) лишний пар «осаждается» – летом он превращается в капли жидкости, и выпадает роса, а зимой – жидкость замерзает, превращаясь в инеей. Загадочные узоры получаются из-за формы кристалла льда. На шершавой стене это незаметно, кристаллы прилепляются к её неровностям как попало, а на гладкой поверхности они пристраиваются друг к другу как кусочки пазла. Если воздух между рамами влажный, пар из него осаждается на внешнее, более холодное, стекло. К сожалению, в современных стеклопакетах слишком хорошая изоляция, и влага на внешнее стекло не попадает, а внутреннее слишком тёплое, чтобы на нём образовывались узоры.

Мы всегда выдыхаем влажный воздух, примесь пара в нём не зависит от времени года. Этот пар невидим, он прозрачен, как и воздух. Но на холоде этот пар, попав «на улицу», сразу конденсируется и превращается в малюсенькие капельки воды. Их-то мы и видим как белое облачко при выдохе – свет рассеивается на многочисленных отражениях и преломлениях на границах капелек.

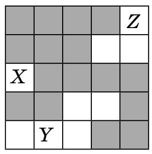
3. С наступлением холодов первыми замерзают мелкие ручейки, которыми «кормятся» большие водоёмы. Приток воды резко падает. А сток воды в большей реке и даже испарение с поверхности большого озера – спадает медленнее. Вот уровень воды и успевает понизиться.

И, конечно, падение уровня зимой заметнее по сравнению с уровнем осенью в сезон дождей, чем, например, с уровнем летом в засуху.

4. Смола – гидрофобная, «боится воды». В тёплую погоду, когда снег влажный, очень тонкий слой воды «приставал» к несмазанному дереву, к этой воде прилипал снег, всё это замерзало и получался подлип – на лыже образовывался слой льда и снега, иногда такой толстый, что не то что ехать, а даже идти нельзя. Смола не давала воде «пристать» к лыже, отталкивала её. У пластиковых лыж подлип куда меньше – пластик отталкивает воду намного лучше деревяшки – но тоже бывает. Чтобы избежать его и улучшить скольжение, поверхность лыж покрывают парафином. Его, кстати, тоже расплавляют на лыже, чтоб впитался в пластик – но уже не горелкой, а не слишком горячим утюгом; открытый огонь пластику вреден.

LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

(«Квантик» № 2, 2021)



1. Пример показан на рисунке.

2. Ответ: не может. Если A – исповедник, то $Ц$ сказал правду, значит, $Ц$ – Фуфелий. Но тогда обращённая к нему фраза монаха $Б$ «Фуфелий – инквизитор» невозможна: если $Ц$ – действительно инквизитор, то она будет истинной, а если $Ц$ – исповедник, то она будет ложной, оба варианта противоречат «правилам игры».

Случай «A – инквизитор» возможен.

3. Ответ: 2000 квадратиков. Каждая фигурка, кроме квадратика, задевает пять рядов, а квадратик задевает четыре ряда. Всего на доске 10 000 фигурок, если бы все фигурки задевали по пять рядов, то сумма чисел была бы равна 50 000. Но на самом деле сумма равна 48 000, значит, 2000 фигурок задевают не пять рядов, а четыре. Эти 2000 фигурок и есть квадратики.

4. Ответ: наименьшее a равно 1357. Пусть один из делителей – это a/k, а другой $(a+1)/m$.

Если $k=1$, $m=1$, то $2036=a+a+1$, откуда $a=1\,017\frac{1}{2}$, то есть нецелое. Значит, этот случай невозможен. Поэтому хотя бы одно из чисел k, m (а может быть, даже оба) больше 1.

Пусть $k\geqslant 2$. Тогда

$$2036=\frac{a}{k}+\frac{a+1}{m}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{a+1}{1}=\frac{3a+2}{2},$$

откуда $4072\leqslant 3a+2$, то есть $a\geqslant 1356\frac{2}{3}$.

Поскольку a – натуральное, то $a\geqslant 1357$.

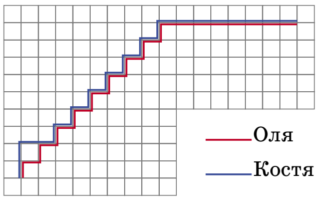
Если же $m\geqslant 2$, то опять $a\geqslant 1357$, поскольку

$$2036=\frac{a}{k}+\frac{a+1}{m}\leqslant\frac{a}{1}+\frac{a+1}{2}=\frac{3a+1}{2}.$$

Вариант $a=1357$ при $k=1$, $m=2$ действительно даёт нужное равенство:

$$1357+\frac{1358}{2}=1357+679=2036.$$

5. Ответ: да. Например, пусть маршрут Оли – «лесенка»: выходим с перекрёстка, направо, налево, направо, налево, ..., направо, налево, направо, а потом всё время прямо. Маршрут Кости отличается лишь первыми тремя шагами: они будут прямо, направо, прямо. Тогда после первого перекрёстка Костя и Оля обошли с разных сторон один и тот же квартал, а дальше двигались одинаково.

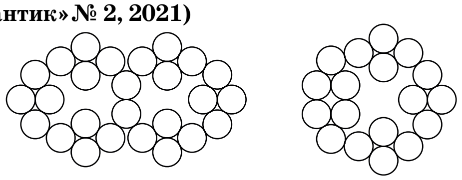


6. Фермер добьётся цели, если каждая свинья будет весить целое число килограммов, либо если каждая свинья будет весить полуцелое число килограммов (на 0,5 кг больше целого).

Пусть фермер сначала докормит каждую свинью до ближайшего целого или полуцелого веса; на это уйдёт менее $0{,}5\cdot 35=17{,}5$ кг корма. Если при этом свиней с полуцелым весом окажется не более 17, то оставшегося корма (более 8,5 кг) хватит докормить их до целого веса. Если же таких свиней хотя бы 18, то свиней с целым весом будет не более $35-18=17$, и можно их докормить до полуцелого веса.

МОНЕТЫ С ТРЕМЯ КАСАНИЯМИ

(«Квантик» № 2, 2021)



МОНЕТЫ ГЕРМАНСКОГО ГЕРЦОГСТВА

На всех пфеннигах (Pfennig(e)) и грошах (Groschen) есть основной номинал (в центре) и дополнительный (по кругу). У пфеннигов дополнительный номинал выражен в грошах, у грошей – в талерах (Thaler). Когда величина основного номинала увеличивается, величина дополнительного во столько же раз уменьшается:

1 PFENNIG = 10 EINEN GROSCHEN
2 PFENNIGE = 5 EINEN GROSCHEN
1/2 GROSCHEN = 60 EINEN THALER
1 GROSCHEN = 30 EINEN THALER
2 GROSCHEN = 15 EINEN THALER

Тем самым, ясно, что «X einen что-то» – это $1/X$ этого чего-то. Поэтому **в гроше 10 пфеннигов, а в талере 30 грошей**.

Медные два пфеннига весят в два раза больше, чем один пфенниг. С серебряными монетами надо учитывать пробу: умножая долю серебра на вес монет, получаем, что **в грошевых монетах на 1 грош приходится 0,4875 граммов чистого серебра** (тут особенно интересны две монеты в 2 гроша – разной пробы и разного веса, но с сохранением этого соотношения).

С высокопробными талеровыми монетами всё немного сложнее.

6 EINEN THALER (1/6 талера) =
= 84 EINE F. MARK (1/84 марки)

EIN THALER = XIV EINE F. M. (1/14 марки?)

EIN VEREINSTHALER =
= XXX EIN PFUND FEIN (1/30 фунта?)
2 THALER (2 талера) =
= VII EINE F. MARK (1/7 марки?) =
= $3\frac{1}{2}$ GULDEN ($3\frac{1}{2}$ гульдена).

Исходя из монет в 1/6 и 2 талера, в **одном талере должно быть 16,71 граммов серебра.** Поэтому ясно, что Ein Thaler и Ein Vereinsthaler – это один талер (опять заметим, что соотношение веса и пробы сохраняет количество серебра в монете; кстати, на двухталеровой монете тоже есть слово vereins, поэтому оно не должно нас смущать). Поэтому **в талере 1,75 гульдена, в марке 14 талеров, а в фунте 30 талеров**.

Противоречие состоит в том, что **содержание серебра в талеровых монетах не соответствует содержанию серебра в грошевых монетах** (в талеровой монете на грош приходится 0,556 граммов серебра). Так часто бывало: монеты крупных номиналов содержали ровно столько драгоценного металла, сколько декларировалось, а разменные монеты – меньше и обращались по принудительному курсу, подобно медным монетам. Для сплава, содержащего меньше 50% серебра, есть специальное название – *биллон*.

КРАЖА НА КУРОРТЕ

• Вова заранее положил в карман туза, двойку, четвёрку, восьмёрку и валета. Отсутствие пяти карт в колоде трудно заметить даже опытному картёжнику. Потом Вова положил на них колоду. Зная порядок спрятанных карт, из них легко составить любую сумму от 1 до 25.

• Вова заподозрил в охоте за кошельками леди Хильду. Если она была уверена, что заходит в свою комнату, то зачем же стучала в дверь?

ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ В ЯЗЫКАХ МИРА

1. Для первого примера из условия подходит только вариант **2 · 2 = 4** (звуковое сходство между русскими числительными и числительными хинди не случайно: русский и хинди – родственные языки). Из этого сразу следует, что первый пример задания 2 – это 1 · 1 = 1, то есть *ek* · *ek* = **ek** (произведения, большие 4, мы записать не сможем, а если *ek* – это «0», не решается пример *ek* – *śūnya*). В таком случае второй пример из условия – это **5 – 2 = 3**. Соответственно, *pā̃c* – *ek* = **cār** (то есть 5 – 1 = 4). Понятно, что *śūnya* – *śūnya* = 0, а записать ответ на хинди мы можем только в том случае, если **śūnya** – это и есть «0». Стало быть, *ek* – *śūnya* = **ek** (1 – 0 = 1).

2. Начнём с числительного *tafór bīst* "80". Мы знаем, что *tafór* – это «4»; самый простой способ обозначить 80, используя четвёрку, – конечно, 4 · 20. Отсюда «50» буквально "2 *nī́ma* 20", значит, *nī́ma* – это что-то вроде «с половиной». Тогда «70» обозначается как 3,5 · 20, и мы можем выполнить задание: 3 – **saráy**; 40 (2 · 20) – **dū bīst**; 90 (4,5 · 20) – **tafór nī́ma bīst**.

3. Ничего совсем уж необычного в тохарской А системе счёта нет, надо только учесть две вещи: во-первых, на конце двузначных не круглых числительных пишется частичка *pi*; во-вторых, названия десятков похожи на названия соответствующих единиц – хотя они и не выводятся из единиц по общему для всех случаев правилу, но, по крайней мере, начинаются с той же буквы (*päñ* – «5» ~ *pñāk* – 50 и т.д.). Тогда:

а) 7 – **ṣpät** (из «77»), 10 – **śäk** (из «15» и «18»), 14 – **śäk śtwar pi**, 40 – **śtwarāk** (из «45»).

б) Поскольку *okät* – это «8», *oktuk* соответственно – "80". Значит, *oktuk okät pi* – **88**.

4. Названия единиц заканчиваются на *-tu*, названия десятков – на *-soti*. Основа при переходе от единиц к десяткам, видимо, не меняется. Эти наблюдения позволяют нам без труда записать три контрольных примера из четырёх: *jötu* – **4**, *misoti* – **30**, 80 – **jasoti**. Но откуда же мы можем узнать, как будет «6»? Обратим внимание, что основы некоторых числительных, приведённых в задаче, похожи друг на друга: *pitö-* «1» ~ *puta-* «2», *jö-* «4» ~ *ja-* «8».

Можно заметить, что эти сходства не произвольны. Чтобы получить из некоторого числительного в два раза большее, нужно заменить в нём гласные: *i* на *u*, *ö* на *a*. Проделав эту операцию с числительным *mitu* «3», получаем, что «6» по-древнеяпонски **mutu**.

СГИБАНИЯ БУМАГИ.

История вторая. Углы.

1. Ответ: 20°. **2. Ответы:** а) 20°; б) 0°; в) 40°. **3. Ответ:** 135°. **4. Ответ:** 45°.

ВЫКУП ПРИНЦЕССЫ

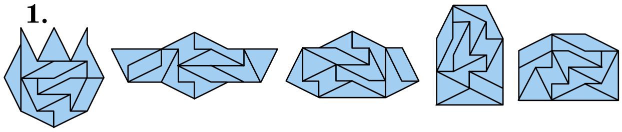
Ответ: в выкупе 67 самоцветов; братья внесли 37, 27 и 17; в мешочках по 2 самоцвета.

Пусть в выкупе x самоцветов. Тогда в шкатулках их было $x-30$, $x-40$ и $x-50$. Эти числа положительные, откуда $x > 50$. Но даже в двух самых больших шкатулках не хватит самоцветов для выкупа, поэтому $2x-70 < x$, то есть $x < 70$.

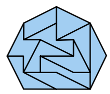
А всех самоцветов уже хватает, поэтому $3x-120 \geqslant x$, откуда $x \geqslant 60$. Итак, выкуп – это число от 60 до 69. Какое же? Вспомним, что возвращённые самоцветы удалось разложить поровну в 7 мешочков, то есть число $(3x-120)-x = 2(x-60)$ кратно 7. Среди 10 возможных ответов годится ровно один: $x = 67$, когда Змей вернул 14 самоцветов, откуда получаем ответ.

ПАРКЕТ ХУДОЖНИКА-АВАНГАРДИСТА ИЛИ (1/2+1/2)-ДОМИНО

1.



2. См. пример справа. Этот семиугольник получился даже компактнее правильного шестиугольника.



$K = 0{,}911$

3. Из двух наборов собирается прямоугольник, а прямоугольниками легко замостить плоскость.