

ПАРАДОКС СИМПСОНА

В классной комнате на переменах всегда стоял шум и гам. Поэтому Лена, пропустив несколько дней по болезни, почувствовала себя не в своей тарелке, когда перед уроком истории в классе воцарилась мёртвая тишина. Все её одноклассники, словно сговорившись, не отрывали глаз от учебника, хотя никакой контрольной не намечалось. Вдруг её кто-то слегка толкнул: «Лена, ты хорошо помнишь то правило? Может, повторишь ещё раз?» Соседка по парте Маша протягивала ей свой учебник.

– Да, я дома учила, – твёрдо заявила девочка. – А чего это все сегодня такие странные?

– Как? Ты не знаешь? – удивилась Маша. – Пока тебя не было, директор решил в честь 800-летия со дня рождения Александра Невского устроить конкурс и вручить призы лучшим классам в каждой параллели!

– А что делать-то, собственно, нужно?

– Ничего сложного: просто получать четвёрки и пятёрки по истории и математике. Завуч найдёт долю хороших оценок по этим предметам, и у кого она выше – тот и победил.

Целую неделю все ребята усердно трудились – учителя не переставали удивляться, какие замечательные дети у них учатся. И вот настало время подвести итоги. Почти в каждом классе есть такой всезнайка, который всё уже сам раньше всех подсчитал и решил. Знакомьтесь – Витя из 7-го «Б», одноклассник Маши, уверенно заявил, что их класс победил. Но таблица результатов, которую составил завуч, показывала другое:

	МАТЕМАТИКА		ИСТОРИЯ	
	7«А»	7«Б»	7«А»	7«Б»
Хорошие оценки	15	9	18	27
Плохие оценки	18	12	9	15
Доля хороших оценок	0,45	0,43	0,67	0,64

– Стойте! – подал голос мальчик. – В моей таблице столько же хороших и плохих оценок, но я



объединил результаты двух предметов вместе, и доли получились другие:

	7«А»	7«Б»
Хорошие оценки	33	36
Плохие оценки	27	27
Доля хороших оценок	0,55	0,57

Это что же выходит: и «А», и «Б» победили одновременно? Ведь данные, по которым составлены таблицы, одни и те же, а результаты разные. Поскольку в правилах конкурса не было явно указано, считаются доли хороших оценок отдельно по предметам или все вместе, завуч решил отложить награждение и посоветоваться с директором.

Маша, уверенная в правоте своего класса, времени даром терять не хотела. Она этим же вечером зашла в гости к своему старому другу – профессору Ивану Петровичу. Пусть он с научной точки зрения объяснит, кто здесь прав.

– Интереснейший случай! – воскликнул профессор. – Кто бы знал, что ты обратишь внимание на возникший здесь парадокс Симпсона!

– Кого-кого? Симпсона? Это из мультлика, что ли?

– Да нет, парадокс носит имя вполне реального учёного Эдварда Симпсона. Говоря в общих словах, это когда в каждой группе выполняется одно соотношение между данными, а в объединении групп – противоположное. Давай посмотрим, как это произошло на твоём примере.

Мы сравниваем долю хороших оценок (результаты в подгруппах) для классов 7«А» и 7«Б» отдельно по математике и истории (подгруппы данных). Они явно указывают на лидерство 7«А». Но когда мы объединили результаты обоих предметов вместе, то увидели, что на самом деле общая доля хороших оценок больше у твоего класса. Любопытно заметить, как работает наша интуиция. Мы думаем, что «победа» в каждой группе всегда означает и «победу» в целом, но увы, это не так.



ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ



По Машиному выражению лица было видно, что за всё это время она только успела запутаться в словах, но к разгадке этой тайны так и не приблизилась.

– Давай приведу ещё один пример. Представь себе, что на упаковке лекарства, которое лечит от болезни Y , написано: «Рекомендовано для мужчин при заболевании Y , рекомендовано для женщин при заболевании Y . Противопоказание: не рекомендовано для людей при заболевании Y ».

– Да не может такого быть! – засмеялась Маша. – Вы, наверное, шутите. Ведь мужчины и женщины – это и есть люди!

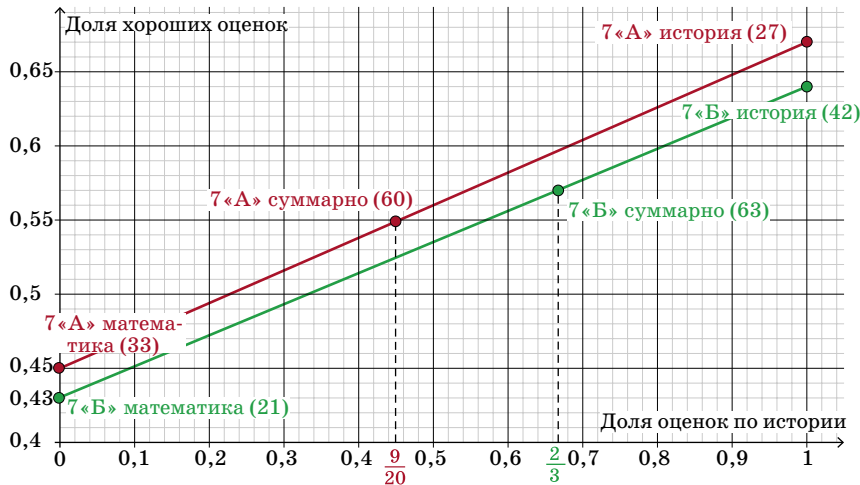
– Я и не утверждаю, что такое было в реальности написано. Но могло быть написано и было бы сущей правдой. Правда не всегда серьёзна. Иногда она курьёзна и... парадоксальна, – хитро прищурился профессор. – Всё дело в результатах исследований. Испытуемых мужчин разделили на две группы. Одним давали плацебо (пустышку), а другим лекарство. То же самое провели с группой женщин, и оказалось, что доля выздоровевших от Y больше среди тех, кто принимал лекарство. Однако если не делить людей на группы, то окажется, что среди тех, кто принимал плацебо, доля излечившихся людей больше. Вот тебе и парадокс! И думай теперь, работает ли лекарство...

– А наоборот может быть? Ну, скажем, лекарство от Z показано всем людям, но не рекомендовано для мужчин и женщин.

– Да, такое тоже возможно. При проведении исследований очень важно замечать такие «перевёртыши». Дело в том, что у 7«А» больше оценок по математике (33), чем по истории (27), и итоговая доля хороших оценок складывается из долей по предметам с бóльшим весом математики (11/20 против 9/20):

$$0,55 = \frac{15+18}{33+27} \approx \frac{0,45 \cdot 33 + 0,67 \cdot 27}{60} = 0,45 \cdot \frac{11}{20} + 0,67 \cdot \frac{9}{20}.$$

А у 7«Б» наоборот, оценок по истории (42) вдвое больше, чем по математике, поэтому в итоговой доле хороших оценок будет с бóльшим весом участвовать история (2/3 против 1/3):



В скобках указано суммарное количество хороших и плохих оценок этого класса

$$0,57 \approx \frac{9+27}{21+42} \approx \frac{0,43 \cdot 21 + 0,64 \cdot 42}{63} = 0,43 \cdot \frac{1}{3} + 0,64 \cdot \frac{2}{3}.$$

В такой ситуации говорят, что выборки оценок для 7«А» и 7«Б» не репрезентативны.

– Вот чудеса! А как вы думаете, кто всё-таки победил? – подозрительно посмотрела на профессора Маша.

– Чтобы устранить парадокс, сделаем веса предметов одинаковыми для каждого класса. Например, можем взять веса предметов для 7«Б» такими же, как для 7«А», тогда общая доля хороших оценок для 7«Б» станет $0,43 \cdot \frac{11}{20} + 0,64 \cdot \frac{9}{20} \approx 0,52$, и 7«А» победит. На самом деле, 7«А» победит и для любого другого соотношения предметов – ведь на графике линия для 7«А» всюду выше, чем для 7«Б».

– Эх, получается, призы достанутся 7«А»...

На следующий день Маша рассказала о парадоксе сначала завучу, а потом и самому директору, который похвалил её за честность (она упомянула и про победу их соперников). Но самым приятным оказалось то, что школа закупила призы «с запасом», поэтому было принято единогласное решение наградить и 7«А», и 7«Б» класс. Домой Маша вернулась с действительно хорошим подарком: увлекательной книгой.

Художник Мария Усеинова

