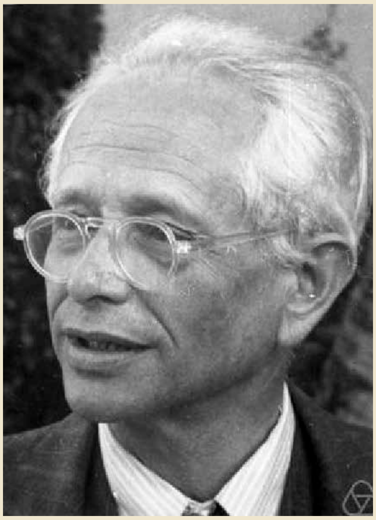
МАКС ДЕН

Сергей Львовский

В популярных статьях о математиках XX века рассказать об их научных достижениях обычно невозможно, приходится отделываться общими словами. Герой этой статьи составляет исключение: об одной из его теорем мы кое-что расскажем.



Макс Ден
1878–1952
Фото: Konrad Jacobs,
Oberwolfach Photo Collection

КАРЬЕРА В ГЕРМАНИИ

Макс Вильгельм Ден родился в Гамбурге в 1878 году в семье врача. Окончив гимназию, он поступил во Фрайбургский университет, но затем перевёлся в университет города Гёттингена – в то время ведущий математический центр мира. В Гёттингене научным руководителем Дена стал великий математик Давид Гильберт. Под его руководством Ден защитил диссертацию о неевклидовых геометриях. Вскоре после этого Ден сделал ту самую работу, о которой мы расскажем подробнее, а затем занялся топологией – новым в то время разделом математики – и получил в этой науке много важных результатов. Он продолжал заниматься математикой в Германии даже после того, как нацисты уволили его из университета за еврейское происхождение, и в 1938 году опубликовал (за границей – в Швеции) одну из основополагающих топологических работ. Да и самая последняя статья Дена, вышедшая в 1950 году, когда он уже жил в Америке, также посвящена его любимой маломерной топологии.

ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

В августе 1900 года в Париже на Втором международном математическом конгрессе Гильберт сформулировал список из 23 задач, решение которых, по его мнению, особенно важно для развития математики в наступающем XX веке. Десятка полтора из этих проблем сейчас решены; первой поддалась «третья проблема», и решил её именно Макс Ден.

Чтобы понять, в чём эта проблема заключалась, вспомним, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту. Доказать это можно «методом разрезания и складывания»: например, остроугольный треугольник с основанием a и высотой h разрезается на части, из которых складывается прямоугольник с основанием a и высотой $h/2$ (рис. 1). Как говорят, остроугольный треугольник с основанием a и высотой h и прямоугольник со сторонами a и $h/2$ *равносоставлены*: один из них можно разрезать на части, из которых можно сложить другой.

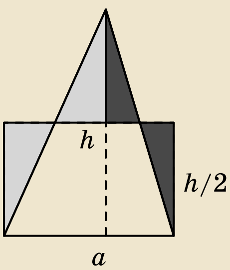


Рис. 1

Имеется аналогичное утверждение и для объёмов: объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту. Но ни в одном учебнике не рассказывается, на какие части надо разрезать пирамиду с площадью основания P и высотой h, чтобы потом сложить из них параллелепипед или призму с площадью основания P и высотой $h/3$ – формулы для объёма пирамиды доказываются совсем иначе.

Вот, например, как это сделано в классическом школьном учебнике геометрии А. П. Киселёва.

Для простоты найдём объём треугольной пирамиды $SABC$, у которой ребро SB перпендикулярно основанию ABC (у Киселёва рассмотрен и общий случай). Пусть площадь основания – треугольника ABC – равна P, а длина ребра SB – высоты пирамиды – равна h. Достроим нашу пирамиду до призмы $ABCESD$ с площадью основания P и высотой h (рис. 2). Эта призма разбивается на три треугольные пирамиды: нашу исходную $SABC$, плюс ещё пирамиды $CDES$ и $CAES$. Если удастся доказать, что объёмы этих трёх пирамид равны, мы получим, что объём пирамиды $SABC$ равен трети объёма призмы $ABCESD$, то есть $Ph/3$. Но как установить равенство этих трёх объёмов, ведь три пирамиды, на которые разбита призма $ABCESD$, не обязательно будут равными фигурами? Это делается с помощью следующей леммы.

Лемма. *Если у двух пирамид равны и площади оснований, и высо́ты, то и объёмы этих пирамид равны.*

Из леммы искомое равенство объёмов выводится легко. В самом деле, объёмы пирамид $SABC$ и $CDES$ равны, потому что у них совпадают и площади оснований (треугольников ABC и DSE), и длины высот (отрезков SB и CD), а у пирамид $CDES$ и $CAES$ объёмы тоже равны: если рассмотреть их как треугольные пирамиды с вершиной S, то высота у них будет общей, а основания (треугольники CDE и EAC) имеют, очевидно, равную площадь.

Давид Гильберт
1862–1943

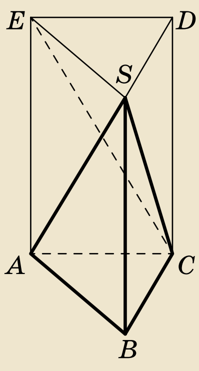


Рис. 2

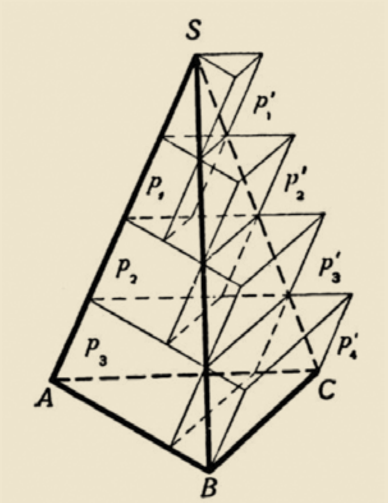


Чертёж к традиционному доказательству леммы: обе пирамиды приближают (изнутри и снаружи) объединениями треугольных призм, а затем переходят к пределу при высотах призм, стремящихся к нулю

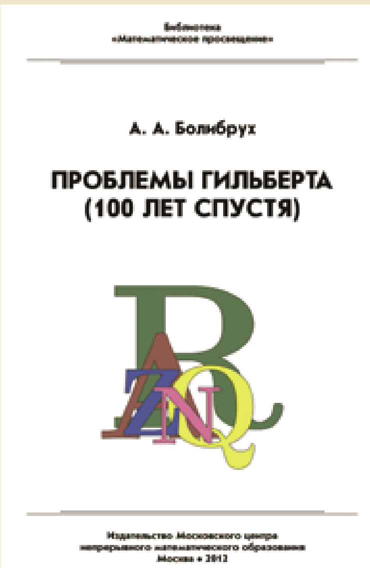
Остаётся, стало быть, доказать лемму – но тут и начинаются настоящие трудности! Сделать из одной пирамиды другую с помощью разрезания и складывания у авторов учебников никак не получалось, так что приходилось проводить рассуждения, выходящие за рамки «чистой геометрии» и использующие такое математическое понятие, как *предел*.

Когда Давид Гильберт в самом конце XIX века занялся вопросами логического построения геометрии, он в числе прочего поставил вопрос, насколько можно в геометрии обойтись без таких «негеометрических» рассуждений. Ему это удалось при построении теории площадей многоугольников, но с объёмами многогранников ничего не получалось; в результате у Гильберта (как полувеком ранее у другого великого математика, К. Ф. Гаусса) возникло подозрение, что «чисто геометрическое» построение стереометрии и вовсе невозможно. Свою третью проблему Гильберт формулирует так.

Существуют ли такие две треугольные пирамиды с равными высотами и одинаковой площадью основания, что первую из них невозможно разбить на конечное число многогранников, из которых можно сложить вторую?

Мы бы сегодня сказали: если есть две пирамиды, одинаковые по площади основания и по высоте, могут ли они быть неравносоставленными? Иными словами: можно ли доказать с помощью разрезаний и складываний нашу лемму?

На самом деле Гильберт хотел большего: он предлагал найти пример двух пирамид с одинаковыми площадями оснований и высотами, которые не только не были бы равносоставленными, но не были бы ещё и «равнодополняемыми». Два многогранника называются *равнодополняемыми*, если к каждому из них можно добавить конечное число одних и тех же многогранников (поворачивая их как угодно) так, чтобы получающиеся бóльшие многогранники стали равносоставленными. Ясно, что объёмы равнодополняемых фигур совпадают, и если бы две пирамиды, о кото-



рых идёт речь в лемме, оказались равнодополняемыми, мы получили бы её чисто геометрическое доказательство.

ЧТО СДЕЛАЛ ДЕН

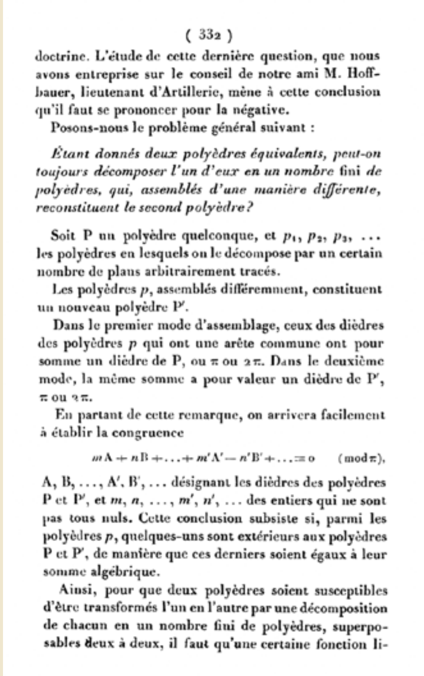
Доклад Гильберта с перечнем проблем был опубликован в третьем номере «Докладов Гёттингенского королевского научного общества» за 1900 год. И в тот же самый номер этого журнала вошла статья Дена «О равносоставленных многогранниках», в которой приводился пример двух неравносоставленных треугольных пирамид с одинаковыми площадью основания и высотой. Решение проблемы увидело свет одновременно с её формулировкой!

Впрочем, оставалась ещё возможность, что пирамиды, неравносоставленность которых установил Ден, всё же равнодополняемы. Однако в следующем 1901 году Ден доказал, что существуют треугольные пирамиды с равными площадями оснований и высотами, не являющиеся ни равносоставленными, ни равнодополняемыми. Вот теперь можно было точно сказать, что третья проблема Гильберта решена, а чисто геометрически вывести формулу для объёма пирамиды невозможно! Кстати, в учебнике Киселёва (в издании 1914 года) упоминаются работы Дена и говорится, какое отношение они имеют к преподаванию геометрии.

Скажем о результатах Дена чуть подробнее. В работе 1900 года он доказывает вот что. Пусть P и Q – два многогранника. Если у многогранника P всего n рёбер, обозначим величины двугранных углов при этих рёбрах через α_1, α_2, ... , α_n. Аналогично, величины двугранных углов при рёбрах многогранника Q обозначим через β_1, β_2, ... , β_m.

Необходимое условие равносоставленности. *Если в этих условиях многогранники P и Q равносоставлены, то найдутся такие натуральные числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ и $q_1, q_2, \dots, q_m$, что суммы $p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\dots+p_n\alpha_n$ и $q_1\beta_1+q_2\beta_2+\dots+q_m\beta_m$ различаются на рациональное число градусов.*

Вот как из этого условия можно вывести, что правильный тетраэдр неравносоставлен ни с каким прямоугольным параллелепипедом. Все двугранные углы при двенадцати рёбрах прямоугольного параллелепипеда – прямые,



(332)

doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini *de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?*

Soit P un polyèdre quelconque, et p_1, p_2, p_3, ... les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P′.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P′, π ou 2π.

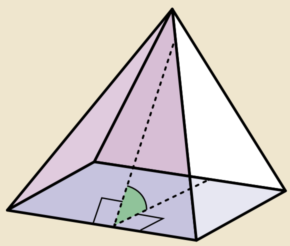
En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \ldots + m'A' - n'B' + \ldots \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\pi),$$

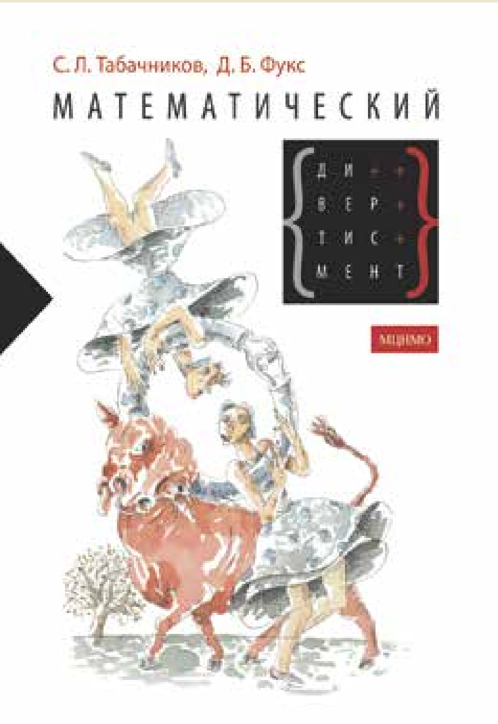
A, B, ..., A′, B′, ... désignant les dièdres des polyèdres P et P′, et m, n, ..., m', n', ... des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P′, de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction li-

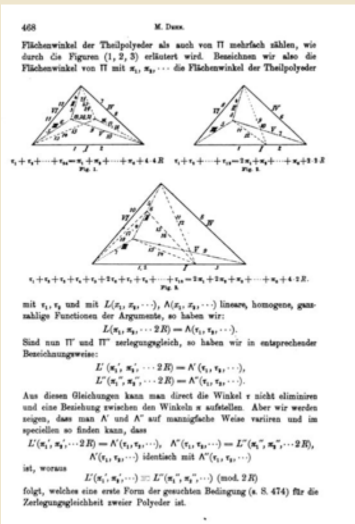
Страница из работы Р. Брикара 1896 года с почти той же формулировкой необходимого условия равносоставленности, которая появится в статье Дена 1900 года. Вместо доказательства своего утверждения Брикар ограничивается словами «легко видеть, что». Вероятно, в опущенном Брикаром доказательстве имелась ошибка.



Двугранный угол – угол между гранями



Книга «Математический дивертисмент» (МЦНМО, 2016)



468 M. Dehn.

Flächenwinkel der Theilpolyeder als auch von Π mehrfach zählen, wie durch die Figuren (1, 2, 3) erläutert wird. Bezeichnen wir also die Flächenwinkel von Π mit $\pi_1, \pi_2, \cdots$ die Flächenwinkel der Theilpolyeder

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

mit τ_1, τ_2 und mit $L(x_1, x_2, \cdots)$, $\Lambda(x_1, x_2, \cdots)$ lineare, homogene, ganzzahlige Functionen der Argumente, so haben wir:

$$L(\pi_1, \pi_2, \cdots 2R) = \Lambda(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Sind nun Π' und Π'' zerlegungsgleich, so haben wir in entsprechender Bezeichnungsweise:

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots),$$
$$L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R) = \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots).$$

Aus diesen Gleichungen kann man direct die Winkel τ nicht eliminiren und eine Beziehung zwischen den Winkeln π aufstellen. Aber wir werden zeigen, dass man Λ' und Λ'' auf mannigfache Weise variiren und im speciellen so finden kann, dass

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots 2R) = \Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots), \quad \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots) = L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots 2R),$$
$$\Lambda'(\tau_1, \tau_2, \cdots) \text{ identisch mit } \Lambda''(\tau_1, \tau_2, \cdots)$$

ist, woraus

$$L'(\pi_1', \pi_2', \cdots) \equiv L''(\pi_1'', \pi_2'', \cdots) \pmod{2R}$$

folgt, welches eine erste Form der gesuchten Bedingung (s. S. 474) für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder ist.

Страница из работы Дена

так что при любых натуральных числах q_1, q_2, ..., q_{12} сумма $q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \ldots + q_{12}\beta_{12}$ кратна 90° и тем самым выражается рациональным (и даже целым) числом градусов. С другой стороны, двугранные углы при всех шести рёбрах правильного тетраэдра равны одному и тому же углу (обозначим его α), так что сумма $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_6\alpha_6$ равна $k\alpha$ для некоторого натурального k. Значит, если правильный тетраэдр и параллелепипед равносоставлены, то угол $k\alpha$, а значит и угол α, выражается рациональным числом градусов. Можно проверить, что для данного угла α это не так, и получаем противоречие.

Формулировку и доказательство результата Дена 1901 года можно посмотреть в книге С. Л. Табачникова и Д. Б. Фукса «Математический дивертисмент» (лекция 22).

ПОД КОНЕЦ ЖИЗНИ

Большинству математиков, имевших несчастье в 30-е годы прошедшего века оказаться в Центральной Европе и вообще на территории, оккупированной Германией в ходе Второй мировой войны, прожить спокойную жизнь не довелось: кто не успел вовремя эмигрировать, тот погиб или, в лучшем случае, пережил очень тяжёлое время. Георг Пик[1], Отто Блюменталь и Альфред Таубер погибли в нацистских концлагерях, куда они были заключены просто за своё еврейское происхождение. Фридриха Хартогса и Феликса Хаусдорфа нацистские преследования (за ту же «вину») довели до самоубийства. Юлиуш Шаудер и Станислав Сакс были казнены за участие в польском антинацистском сопротивлении. Гуго Штейнгауз с 1941 по 1945 год был вынужден скрываться под чужим именем. Стефан Банах в годы немецкой оккупации вместо работы по специальности стал объектом бесчеловечных медицинских экспериментов...

Дену повезло больше: он успел уехать в последний момент перед тем, как началось самое страшное. В начале 1939 года он переехал из Германии в Норвегию, нашёл там работу, а когда Норвегию оккупировали

[1] См. статью Г. Мерзона «Площади многоугольников и тающий лёд» о формуле Пика в «Квантике» № 9 за 2018 год.

нацисты, уехал в США, для чего ему пришлось проехать больше чем полмира: сначала пересечь СССР по Транссибирской магистрали, затем из Владивостока по морю перебраться в Японию и, наконец, из Японии на корабле через Тихий океан – в США.

На свою новую родину Макс Ден с супругой прибыли в самом начале 1941 года. Первые годы ему жилось непросто: приходилось за маленькую зарплату учить слабых студентов то в одном, то в другом университете низкого уровня. Но в 1945 году Дену улыбнулась удача: его приняли на работу в Блэк-Маунтин-колледж в штате Северная Каролина. Это было очень своеобразное учебное заведение, основанное в 1933 году как независимый университет, похожий по устройству на коммуну. Все управленческие решения в колледже принимались на общем собрании студентов и преподавателей. Студенты и преподаватели постоянно жили на кампусе среди леса; они питались в общих столовых, а еда для этих столовых выращивалась на университетской ферме, где полевыми работами занимались (наряду с учёбой и преподаванием) опять-таки преподаватели и студенты.

У Блэк-Маунтин-колледжа не было аккредитации (так что он не выдавал официальных дипломов), ему вечно не хватало средств, и Дену платили очень мало, но он, похоже, был на этой работе счастлив. Ден преподавал студентам не только математику, но ещё философию, латынь и греческий, ходил с ними в походы, занимался, как сейчас бы сказали, экологией (боролся против вырубки окрестных лесов)... В 1952 году Макс Ден вышел на пенсию. Предполагалось, что он продолжит жить на кампусе и будет исполнять обязанности консультанта, но уже в следующем месяце он умер от сердечного приступа. Похоронили Дена в том же лесу, в котором был расположен университетский кампус.

Имя Макса Дена осталось в науке: по сей день в топологии важную роль играют «скручивание Дена» и «хирургия Дена».

Русский перевод книги Гильберта, в которой он изложил свои исследования по аксиоматическому построению геометрии. С этими исследованиями связаны и тема диссертации Дена, и его статьи о равносоставленности многогранников.

Кампус Блэк-Маунтин-колледжа