Математический кружок

Александр Перепечко

КВАНТИК, НОУТИК *и фигурные* ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

– Квантик, да здесь целый склад фигурных преобразователей!

– Давай опробуем их в действии!

Вот так Квантик и Ноутик, забравшись на заброшенный чердак, принялись исследовать диковинные устройства – фигурные преобразователи.

– Смотри, Квантик, этот – самый простой. Если ему дать треугольник ABC, он разделит его стороны в отношении 1:1, то есть пополам, и выдаст новый треугольник с вершинами в полученных точках (рис. 1).

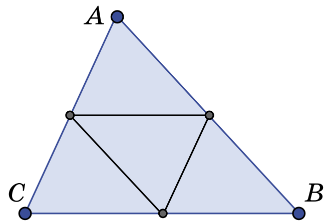


Рис. 1

– Ага, новый треугольник будет такой же, как прежний, но в 4 раза меньше по площади. – Квантик уже скормил преобразователю треугольник и показал Ноутику, как исходный треугольник складывается из четырёх копий полученного. – Видишь, стороны нового треугольника – это средние линии исходного, то есть они соединяют середины его сторон.

– Так-так... средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне, – припомнил Ноутик, – и в два раза короче её!

– И поэтому новый треугольник имеет такие же углы, но в два раза меньшие стороны.

– Ну да... – немного разочарованно протянул Ноутик и перешёл к следующему. – А вот преобразователь поинтересней! Он делит стороны треугольника уже в отношении 1:2 (рис. 2).

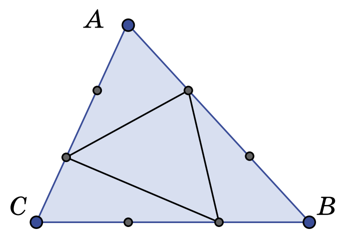


Рис. 2

– Да, здесь треугольник делится уже не на одинаковые части. Но у нового треугольника площадь меньше ровно в три раза!

И Квантик пустился в пространные объяснения. Полчаса спустя Ноутик всё же понял ключевое утверждение Квантика: если два треугольника имеют общий угол, то их площади соотносятся так же, как произведения прилегающих к этому углу сторон.

Задача. Докажите утверждение Квантика, используя такой факт: отношение площадей треугольников ABC и ABC', где C' лежит на AC (рис. 3), равно отношению AC к AC'.

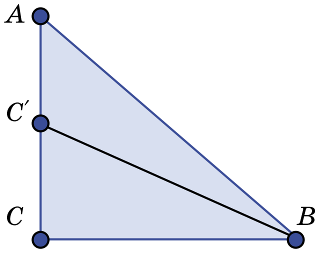


Рис. 3

– Ага, – наконец просветлел Ноутик. – При преобразовании от ABC отрезали три угловых треугольника, каждый площадью $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ площади ABC, суммарно – $\frac{6}{9}$, и остался огрызок как раз в $\frac{1}{3}$ площади ABC. Интересно, а полученный треугольник будет с такими же углами, как и ABC?

– Наверное, не всегда, – предположил Квантик. – Ладно, пошли вон к тем, совсем заковыристым преобразователям. Им нужно давать четырёхугольники!

– О, вот этот опять делит стороны пополам. Получается четырёхугольник, совсем не похожий на исходный (рис. 4). А какая у него площадь?

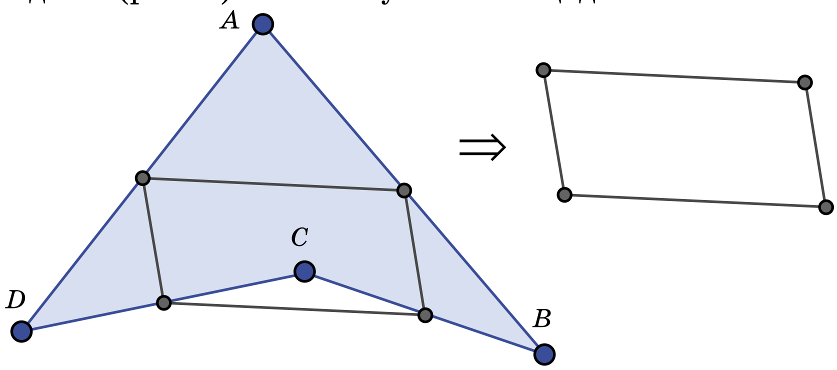
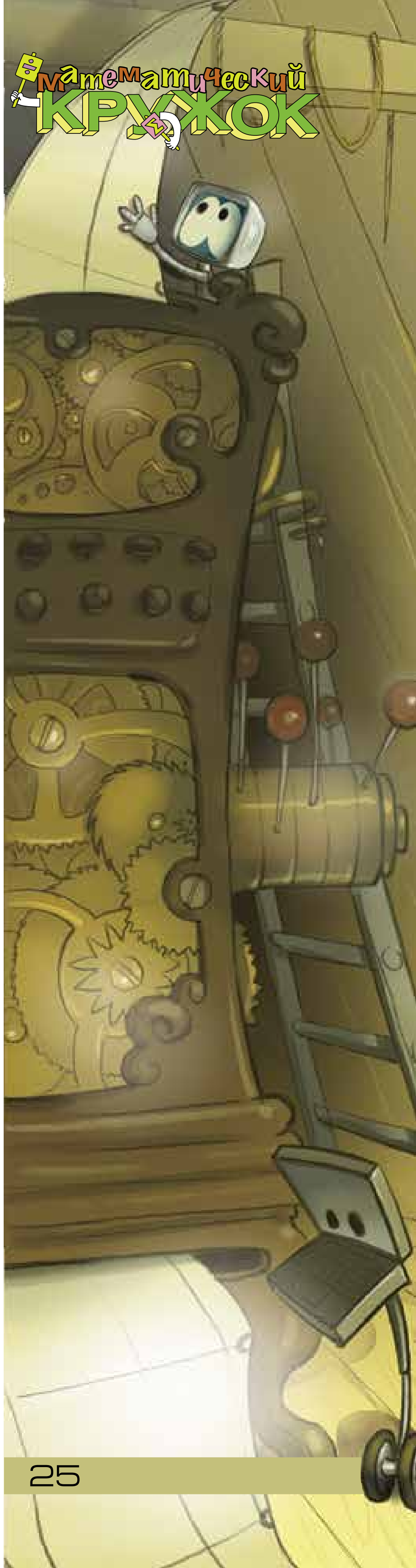


Рис. 4

– Используем такой трюк: *если в исходном четырёхугольнике $ABCD$ сдвинуть одну диагональ (AC) вдоль самой себя, а другую (BD) оставить на месте, получится четырёхугольник $A'BC'D$ той же площади* (рис. 5). Как бы это тебе попроще объяснить...[1]

– Ну уж нет, ещё час я слушать не намерен! – возмутился Ноутик.

[1] См. статью Г. Мерзона «Площади и перекашивания» в «Квантике» №2 за 2020 год.



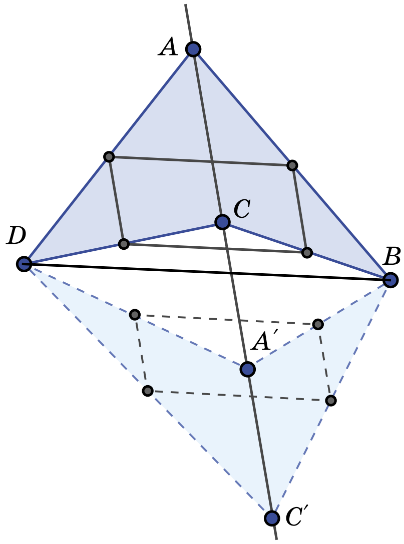


Рис. 5

– Это очень красиво! – запротестовал Квантик, но, смирившись, решил объяснить в следующий раз и продолжил: – Сдвигая диагонали таким образом, мы можем превратить $ABCD$ в параллелограмм.

– Надо же! А преобразованный четырёхугольник при этом вообще не меняется – только двигается.

– Ну естественно! Его стороны, как средние линии, параллельны диагоналям и вдвое меньше по длине, – пояснил Квантик (рис. 6).

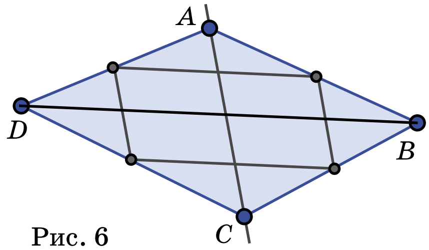


Рис. 6

– А значит, его площадь вдвое меньше параллелограмма $ABCD$, ура! – возликовал Ноутик. – Ух ты, а это что за экземпляр?

– Он тоже преобразует четырёхугольники, но стороны AB и CD он делит в отношении 1:2, а стороны BC и DA – в отношении 2:1.

– Какой странный преобразователь! Во сколько же раз будет меньше полученный четырёхугольник? И обязательно ли он будет меньше?

Правильно ответив на последний вопрос Ноутика, вы решите задачу 40 «Нашего конкурса» на с. 32, а также догадаетесь, почему на чердаке не было преобразователя, делящего стороны четырёхугольника в одном и том же отношении 1:2.

Художник Екатерина Соловей