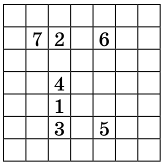
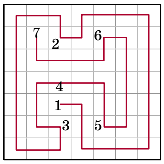
НАШ КОНКУРС, VII тур («Квантик» № 3, 2021)

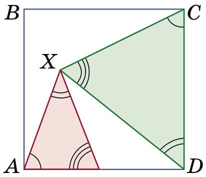
31. *Любознательный жук сидит в клетке под номером 1. Он умеет переползать только в клетку, соседнюю по стороне, и хочет обойти числа от 2 до 7 в порядке возрастания. При этом он не хочет посещать никакую клетку больше одного раза. Помогите ему построить подходящий маршрут.*





Ответ: см. нижний рисунок.

32. *Квантик расположил в квадрате два треугольника с одинаковым набором углов, как схематично показано на рисунке. Угол какой величины обязательно встретится среди углов этих треугольников?*



Ответ: 45°. Либо угол с одной дугой равен 45°, либо AX и CX симметричны относительно BD (так как углы с одной дугой равны), и X лежит на BD, откуда угол с двумя дугами равен 45°.

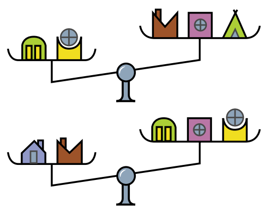
33. *Число N обладает таким свойством: если в нём вычеркнуть несколько цифр (одну или больше, но чтобы что-то осталось), то всегда получается простое число или 1. Какое наибольшее число знаков может иметь N?*

Ответ: 3. Посмотрим на остатки цифр числа N при делении на 3. Остатки 1 и 2 не могут присутствовать оба: вычеркнув все цифры, кроме этих двух, мы получим число, кратное 3. По той же причине ни один остаток не может присутствовать трижды, а остаток 0 – даже дважды. Значит, один из остатков 1 и 2 входит дважды, а остаток 0 – один раз. Пример: 113.

34. *Из тысячи красных и синих кубиков $1\times1\times1$ сложили куб $10\times10\times10$. Чтобы кубики не перепачкались свежей краской, между соседними кубиками разного цвета вставляли тонкий изолирующий квадратик. Оказалось, что изолирующих квадратиков нечётное количество. Докажите, что на поверхности куба не может быть поровну красного и синего.*

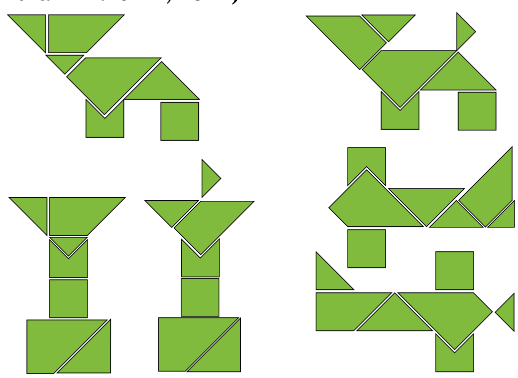
Ответ: Число синих граней чётно (по 6 на каждом синем кубике). Внутри куба находится нечётное число синих граней, потому что это удвоенное число пар соседних синих кубиков плюс число изолирующих квадратиков. Значит, на поверхности нечётное число синих граней. Если бы красных граней было столько же, то общее число квадратиков на поверхности не делилось бы на 4, но оно равно 600, противоречие.

35. *Толя нашёл 6 игрушечных домиков из старого конструктора. Он точно помнит, что эти домики весят 10, 20, 30, 40, 50 и 60 граммов, но не помнит, какой именно домик сколько весит. Он дважды взвесил домики на правильных весах так, как показано на рисунке. Вес каких домиков он может определить однозначно?*



Ответ: всех, кроме домиков и . Так как веса домиков кратны 10, чаши на каждых весах различаются не меньше, чем на 10. Имеем:
$+ 60 \geqslant + \geqslant + + + 10 \geqslant + 20 \geqslant$
$\geqslant + + + 30 \geqslant + 10 + 20 + 30 = + 60.$
Значит, все неравенства превращаются в равенства, откуда $= 60$, $= 10$ и $= 20$. Далее, $60 + = + + 20$, и веса этих трёх домиков – 30, 40 и 50. Из трёх вариантов для подходит лишь один: $= 40$. Так как и всё время были на одной чаше, их нельзя различить.

ОТ ИКАРА ДО АЭРОПЛАНА
(«Квантик» № 4, 2021)



СГИБАНИЯ БУМАГИ. История третья. Соответствующие элементы.

1. Ответ: 12. Убедитесь, что длинная сторона прямоугольника равна $AB+BC+CA$, а короткая равна $BC+CA$.

2. Разберите два случая: угол GBH равен либо углу GFE, либо углу FEG.

СИРИЙСКИЕ КВАДРАТЫ

Подсказка: Самая короткая запись – это, видимо, квадрат какого-то круглого числа. Обратите внимание, что если прибавить этот квадрат ко 2-му квадрату из списка, получится 12-й квадрат.

XLII ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР

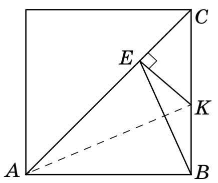
8 – 9 классы. Базовый вариант

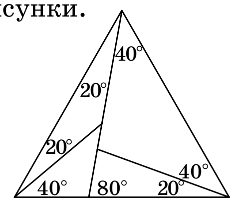
1. Ответ: может. Например,
$(8!-4)+(8!-3)+\ldots+8!+\ldots+(8!+4)=9\cdot 8!=9!$.

2. Ответ: не обязательно. Например, в треугольнике с углами $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$ оба указанных угла равны 15°. *Замечание.* Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3. Ответ: может. Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который ещё не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар $\{1001, 1005\}$ и $\{1002, 1004\}$. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «лёгкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжёлой» паре – так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвёртым взвешиванием.

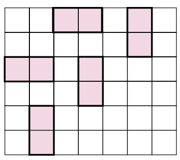
4. Ответы: можно, см. рисунки.





На левом рисунке сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.

5. а) **Ответ:** не всегда. Контрпример для доски 6×7 дан справа. Путь строится однозначно и упирается в самую правую доминошку. Аналогичный пример годится и для доски 100×101.



б) **Ответ:** всегда. Первая и последняя клетки лежат на главной диагонали, их «координаты» (1, 1) и (100, 100). Докажем, что в любую свободную клетку этой диагонали можно попасть.

Пусть мы дошли до клетки (n, n). Если клетка $(n+1,\ n+1)$ свободна, то хотя бы одна из клеток $(n,\ n+1)$ и $(n+1,\ n)$ не занята, и через неё можно пройти на клетку $(n+1,\ n+1)$. Если клетка $(n+1,\ n+1)$ занята, то из 8 клеток вокруг занята ровно одна, соседняя по стороне, и один из двух путей из (n, n) в $(n+2,\ n+2)$ не закрыт.

8 – 9 классы. Сложный вариант

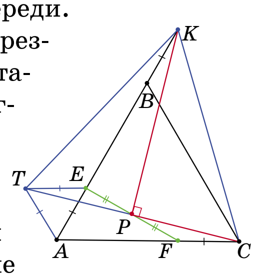
1. Разность двух таких чисел, в которых число восьмёрок различается на 1, имеет вид 1880…0. Но $188=47\cdot 4$, то есть делится на 47, как и 2021. Поэтому, добавляя восьмёрки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 47.

2. Деление с остатком кучи конфет на k детей можно представить так: раскладываем конфеты на k кучек, которые или равны (если остаток 0), или в части кучек на 1 конфету больше, чем в остальных (число таких кучек равно остатку).

Пусть первый ребёнок разложит так конфеты на кучки, расположив кучки слева направо по возрастанию числа конфет в них. Можно считать, что он возьмёт себе правую кучку, если он мальчик, или левую, если он – девочка.

Когда зайдёт следующий ребёнок, конфеты уже будут разложены на кучки, как если бы он сам делил с остатком (ведь и число детей, и число кучек уменьшилось на 1), и снова мальчик возьмёт правую кучку, а девочка – левую, и т.д. В итоге мальчики возьмут все правые кучки в количестве, равном числу мальчиков, что не зависит от порядка детей в очереди.

3. На продолжении отрезка CP за точку P отметим такую точку T, что $CP=PT$. Тогда $FCET$ – параллелограмм, откуда TE равно и параллельно FC. Но тогда треугольники TEK и KBC равны по первому признаку: тупые углы у них равны 120° и соответствующие стороны при этих углах равны. Значит, TKC равнобедренный и его медиана KP – высота.



4. Выберем любого аборигена – назовём его Петей – и найдём его возраст. Наденем на каждого второго аборигена шапку, начиная с Пети. Занумеруем аборигенов без шапок, идущих за Петей по часовой стрелке: 1, 2, …, 24, 25.

Каждый абориген верно сообщает сумму возрастов своих соседей (если сложить названные аборигеном числа). Сложим числа, названные 1-м, 3-м, …, 25-м аборигенами без шапок – это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *плюс* возраст Пети. Сложим числа, названные 2-м, 4-м, …, 24-м аборигенами без шапок – это будет сумма возрастов всех аборигенов в шапках *минус* возраст Пети. Вычтя из первой суммы вторую и поделив на 2, получим возраст Пети.

Зная возраст любого аборигена, легко узнать, кто его соседи, по их ответам.

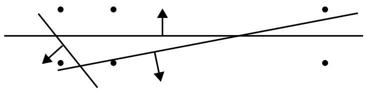
5. Ответы: а) 3 хода; б) 4 хода.

Вместо M будем рассматривать прямоугольник N с вершинами в угловых лампочках.

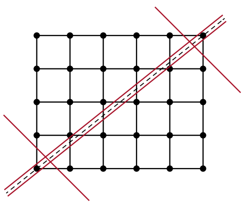
Оценки. Каждым ходом зажигается хоть одна угловая лампочка, откуда ходов не более 4.

В п. а) заметим ещё, что мы должны на каком-то ходу зажечь центральную лампочку. Вместе с ней по одну сторону от проведённой прямой окажется хотя бы две угловые лампочки (поскольку прямая, параллельная проведённой и проходящая через центр, делит квадрат N пополам).

Примеры. **а)** Сначала зажигаем всё, кроме нижнего ряда лампочек, затем оставшиеся лампочки, кроме угловой, и наконец угловую. (На рисунке изображены два нижних слоя лампочек.)



б) Прямоугольник N имеет размеры 19×20. На его диагонали нет других лампочек, так как 19 и 20 взаимно просты. Проведём первую прямую параллельно диагонали, чуть ниже, чтобы эти две лампочки оказались над ней, а все остальные лампочки остались с той же стороны, что и до этого; зажжём все лампочки ниже этой прямой. Аналогично проведём вторую прямую параллельно диагонали, но чуть выше, и зажжём все лампочки выше этой прямой, как на рисунке. (Для примера мы взяли N размером 4×5). Оставшиеся две угловые лампочки можно зажечь за два хода, отсекая прямой от остальных.



6. Ответ: $n=100(m+1)$ при $k=2m$ и
$n=100(m+1)+1$ при $k=2m+1$.

Пусть $k=2m$ или $k=2m+1$.

Алгоритм. Мысленно разделим номера на 100 участков по $m+1$ номеров, а в случае нечётного k оставшийся номер объявим запасным. Пусть i-й турист сначала проверяет все номера i-го участка, двигаясь слева направо, потом идёт в запасной номер (если тот есть), а потом проверяет номера $(i+1)$-го участка, но справа налево (если $i=100$, проверяет 1-й участок). Никакие два туриста не попадут при этом в один номер, так как суммарно на двух их участках (включая запасной номер, если он есть), всего $k+2$ номера.

Оценка. Чтобы каждый из 100 туристов мог гарантированно заселиться, он должен иметь список из $k+1$ различных номеров, куда будет заходить. Можно считать, что списки не меняются по ходу заселения других туристов (ведь никакой информации о них он не узнает).

Возьмём в списке каждого туриста первые $m+1$ номеров. Все эти $100(m+1)$ чисел различны, иначе два туриста с совпавшим числом могут оба попасть в этот номер (если их предыдущие номера, которых суммарно не больше $m+m=2m$, все на ремонте). Значит, $n\geqslant100(m+1)$.

При чётном k всё доказано. При нечётном k, если у какого-то туриста, скажем, Пети, $(m+2)$-й номер совпадает с каким-то из $100(m+1)$ «первых» номеров, скажем, с Васиным, то когда у Пети первые $m+1$ номеров, а у Васи – первые m будут на ремонте, они попадут в один номер. Значит, все $(m+2)$-е номера отличны от $100(m+1)$ первых (хотя могут совпадать друг с другом), то есть $n\geqslant100(m+1)+1$.

7. Случай $p=q=1$ очевиден. Иначе p и q различны, пусть $p<q$. Всего лягушка пропрыгала путь, длина которого делится на p и на q, а значит, и на pq, так как p и q взаимно просты. Тогда длина пути равна kpq для некоторого натурального k, и лягушка сделала kq «коротких» прыжков вправо и kp «длинных» прыжков влево.

Известно, что при взаимно простых p и q можно представить d в виде $d=ap-bq$ с целыми a и b. Это равенство сохранится, если одновременно увеличить (или уменьшить) a на q и b на p. Поэтому можно выбрать a натуральным и не бóльшим q. При этом b будет неотрицательным (иначе $d\geqslant p+q$), и так как $a\leqslant q$, то $b<p$ (ведь $d>0$). Поэтому $a+b<p+q\leqslant k(p+q)$.

Назовём каждую серию из $a+b$ последовательных прыжков лягушки *окном*. Условно считаем, что за последним прыжком лягушки идёт её первый прыжок (как при движении по кругу), поэтому окно может состоять и из нескольких последних и первых прыжков. Тогда всего окон ровно $k(p+q)$ штук.

Надо найти окно, в котором лягушка сделала ровно a коротких прыжков (и b длинных) – тогда она сдвинется на d за эти $a+b$ прыжков. Такое окно найдётся, если есть окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a: можно сдвигать первое окно по кругу, пока не дойдём до второго, число коротких прыжков в окне каждый раз будет меняться максимум на 1, и будет момент, когда оно равно a.

Сложим число коротких прыжков во всех окнах – получим $kq(a+b)$, ведь каждый прыжок учли $a+b$ раз. Окон $k(p+q)$, и в среднем на окно придётся $\frac{kq(a+b)}{k(p+q)}$ коротких прыжков. Это равно $\frac{qa+qb}{p+q}=\frac{pa+qa-d}{p+q}=a-\frac{d}{p+q}$, что больше $a-1$ и меньше a. Значит, найдётся окно, где коротких прыжков не менее a, и окно, где их не более a.