

# ЛОМАНАЯ В КВАДРАТЕ

Лабораторная работа по математике

**Задача.** В квадрате построена семизвенная ломаная, концами которой являются его диагональные вершины, а соседние звенья перпендикулярны (рис. 1). Длины её звеньев – целые числа от 1 до 7. В каком отношении эта ломаная делит площадь квадрата?

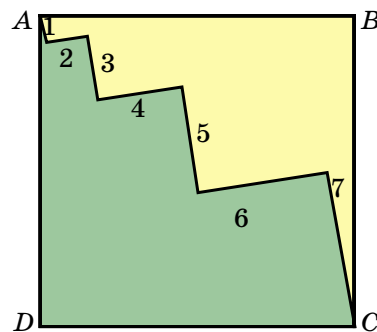


Рис. 1

**Решение.** Для сравнения площадей нужно их вычислить. Но как вычислять площади таких экзотических фигур? Даже вычисление площади самого квадрата кажется неприступным. Но заметим, что ломаная змейкой «вертится» вокруг диагонали  $AC$ . Может, «распрявим» её? Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник  $AEC$ , гипотенуза которого равна диагонали  $AC$  квадрата  $ABCD$ , а стороны треугольника параллельны звеньям ломаной (рис. 2). Катеты будут равны:  $AE = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ ,  $EC = 2 + 4 + 6 = 12$ , тогда по теореме Пифагора  $AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$ , значит, гипотенуза  $AC = 20$ .

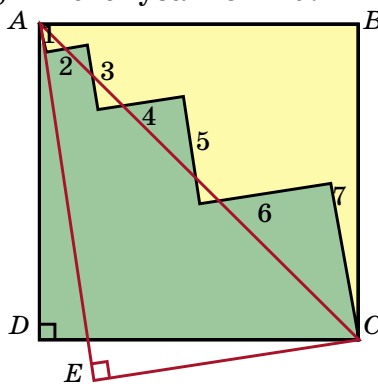


Рис. 2

Зная диагональ квадрата, можно вычислить его сторону, она будет в  $\sqrt{2}$  раз меньше диагонали и равна  $\sqrt{200}$ . Заметим, что  $\sqrt{200} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{2^2 + 14^2}$ , это значит, что сторона  $AB$  равна гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 2 и 14 или удвоенной гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 1 и 7.

Наложим теперь нашу змейку на квадратную сетку (чтобы она шла по сторонам клеток). Вершины  $A$  и  $C$  квадрата автоматически будут в узлах, а две другие вершины восстановятся однозначно и тоже попадут в узлы: это видно из выделенных на рисунке 3 прямоугольных треугольников с катетами 2 и 14.

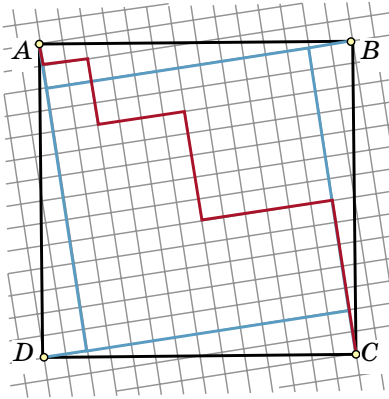


Рис. 3

Иногда площади фигур находят с помощью палетки. Палетка – это прозрачная плёнка, расчерченная на квадратные единицы. Фигуру накрывают палеткой и считают число клеток, попавших в фигуру. Обычно с помощью палетки вычисляют приближённое значение площади. В нашем же случае это можно сделать точно.

Попробуйте сделать себе палетку и подсчитать площади жёлтой и зелёной частей квадрата самостоятельно, а потом сравнить с ответом (рис. 4).

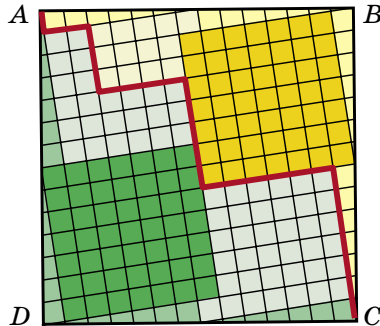


Рис. 4

Вот что у нас получилось. Для удобства в каждой части выделены по четыре треугольника с катетами 1 и 7 и по квадрату  $7 \times 7$ . Тогда  $S_{\text{жел}} = 2 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 13 = 76$ ,  $S_{\text{зел}} = 2 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 37 + 24 = 124$ , поэтому отношение площадей равно  $\frac{76}{124}$ , или  $\frac{19}{31}$ . **Ответ:**  $\frac{19}{31}$ .

Попробуйте решить похожие задачи для других таких ломаных. Например, отношение площадей для ломаной 1-2-3 равно  $\frac{3}{7}$ , а для ломаной 1-2-...-10-11 равно  $\frac{51}{71}$ . Имейте в виду, что некоторые ломаные выходят за границы квадрата и задача теряет смысл.

