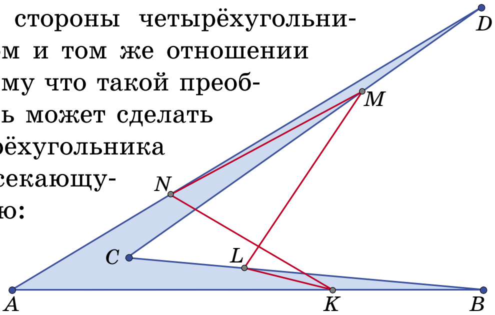
КВАНТИК, НОУТИК И ФИГУРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ («Квантик» № 4, 2021)

Решение задачи. Пусть h – длина высоты, опущенной из вершины B на сторону AC. Тогда площадь треугольника ABC равна $AC\cdot\frac{h}{2}$, а площадь треугольника ABC' равна $AC'\cdot\frac{h}{2}$, откуда эти площади относятся как $AC:AC'$.

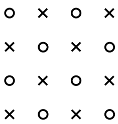
Ответ на последний вопрос Ноутика см. в решении задачи 40 нашего конкурса (с. 29).

На чердаке не было преобразователя, делящего стороны четырёхугольника в одном и том же отношении 1 : 2, потому что такой преобразователь может сделать из четырёхугольника самопересекающуюся линию:

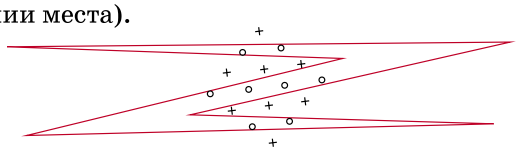


НАШ КОНКУРС, VIII тур («Квантик» № 4, 2021)

36. *Можно ли построить замкнутый шестиугольный забор так, чтобы овцы, обозначенные ноликами, оказались внутри забора, а волки, обозначенные крестиками, – снаружи?*



Ответ: да, см. рисунок (он повёрнут для экономии места).



37. а) *У Тани есть 3 гири весом 1001, 1002 и 1003 г (неизвестно, где какая), а у весовщика Степана Ильича – двухчашечные весы. Таня отдаёт гири весовщику и заказывает ему два взвешивания (заказ делается сразу, менять его после первого взвешивания нельзя). Может ли она гарантированно установить, какая гиря сколько весит?*

б) Тот же вопрос, если у весов Степана Ильича левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равновесие, если вес на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Ответ: а) нет; б) да.

а) Весы не покажут равенства, поэтому у двух взвешиваний 4 возможных исхода (<<, <>, ><, >>). По исходу мы должны однозначно восстановить веса. Но вариантов «перемешать» их между трёмя гирями всего 6, что больше 4.

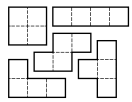
б) Закажем такие два взвешивания: на левой чаше – гиря 1, на правой – 2; на левой – 3, на правой – 1. По исходам взвешиваний веса определяются, как видно из таблицы вариантов:

1	2	3	1 или 2	3 или 1
1001	1002	1003	<	>
1001	1003	1002	<	=
1002	1001	1003	=	=
1002	1003	1001	<	<
1003	1001	1002	>	<
1003	1002	1001	=	<

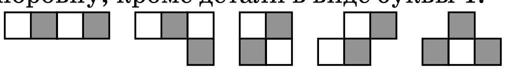
38. *В каждой клетке квадратной таблицы стоит 1 или –1. Сумма всех чисел в таблице равна 1. Можно ли определить, чему равно их произведение?*

Ответ: да. Так как все числа нечётны и их сумма нечётна, то и их количество нечётно. Значит, сторона таблицы состоит из нечётного числа клеток: $2k+1$. Тогда всего клеток в таблице $4k^2+4k+1$. Так как сумма всех чисел равна 1, среди них единиц на одну больше, чем минус единиц. Тогда минус единиц $2k^2+2k$ – чётное число. Поэтому произведение всех чисел равно 1.

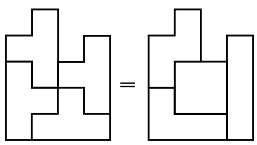
39. *У Ани и Тани было пять деталей, изображённых на рисунке. Аня взяла одну из деталей и вырезала ещё три таких же, а Таня забрала себе оставшиеся четыре. После этого Аня сложила фигуру из своих четырёх деталей, а Таня – из своих. Выяснилось, что фигуры у Ани и Тани вышли одинаковые. Для каждой детали определите, могла ли она достаться Ане.*



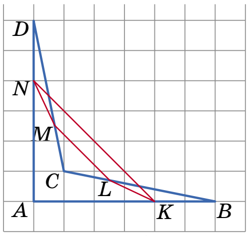
Ответ: могла достаться лишь деталь в виде буквы Т. Раскрасим клетки обеих фигур в одинаковом шахматном порядке. Детали тоже раскрасятся, и в каждой чёрных и белых клеток будет поровну, кроме детали в виде буквы Т.



Если эту деталь забрала Таня, в её фигуре разное количество чёрных и белых клеток, а у Ани – поровну. Поэтому Аня могла взять только деталь в виде буквы Т. Получить одинаковые фигуры можно, например, как на рисунке справа.



40. *Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD. Каждая точка делит соответствующую сторону в отношении 1 : 2 (для стороны AB либо AK : KB = 1 : 2, либо BK : KA = 1 : 2, и т.д.). Могло* *ли оказаться, что площадь четырёхугольника $KLMN$ больше площади четырёхугольника $ABCD$?*



Ответ: могло. Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках (0,0), (3,0), (a,a), (0,3) и выберем K, L, M, N так, что $AK : KB = BL : LC = 2 : 1$, $CM : MD = DN : NA = 1 : 2$ (как на рисунке). Возьмём a очень маленьким. Площадь $ABCD$ будет тогда почти нулевой. При этом четырёхугольник $KLMN$ будет близок к трапеции с вершинами в точках (0,1), (0,2), (2,0), (1,0), и его площадь будет близка к 1/2.

ЗВУК И ВЕТЕР («Квантик» № 4, 2021)

Ветер на разной высоте дует с разной скоростью: ведь около земли он о неё тормозится. Эта разность скоростей разворачивает направление звука, уводя его от земли и от слушателя.

Представьте, что вы толкаете тележку в супермаркете, но её правое колесо заедает. В результате её правая половина отстаёт, что разворачивает тележку направо (туда, где движение тормозится). Так и со звуком: вверху встречный ветер сильнее, звук там отстаёт от звука внизу, и это разворачивает звук целиком, так что он отклоняется вверх.

Аналогия с тележкой кажется сомнительной. Звук – это же не монолитное тело; он не упирается в пол, он распространяется сразу во все стороны и заворачивает за углы – как наплыв воды, или скорее как волны на воде: ведь сам звук – это тоже волны давления в воздухе. Но сам процесс разворота происходит для звука действительно похожим образом.

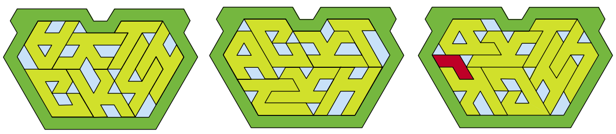
Поясним это иначе. Ветер мешает звуку, замедляя горизонтальное движение звука вверху. Это явление можно смоделировать и без ветра, если наверху звуку нужно будет проходить большее расстояние в неподвижном воздухе. Вот изначальная земля и воздух из пластилина:

Растянем – буквально – пространство по горизонтали в верхней части. Появятся оборочки:

Если теперь их распрямить, лента воздуха изогнётся. И станет видно, что слушатель теперь будто отделён холмом от источника звука:

Конечно, небольшой холмик звук обойдёт, но за большой горой слышимость уже куда хуже, чем на открытой равнине: чем больше звук ответвлялся в сторону, тем меньше его дошло. И если «вернуть всё как было», выпрямив ленту, обходивший гору звук завернёт вверх:

«СУП КВАНТИК», ИЛИ ПИЩА ДЛЯ УМА («Квантик» № 5, 2021)



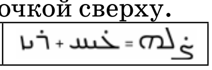
СИРИЙСКИЕ КВАДРАТЫ («Квантик» № 5, 2021)

1. Приписав 7-й квадрат ко 2-му квадрату из списка, получим 12-й квадрат. Предположив, что приписывание обозначает сложение, имеем $x^2 + (x+5)^2 = (x+10)^2$. Единственный натуральный корень этого уравнения равен 15, а значит, нам даны квадраты чисел от 14 до 25.

2. Разряды пишутся от большего к меньшему справа налево: единицы – десятки – сотни. Можно предполагать, что для каждого количества единиц от 1 до 9 и десятков от 10 до 90 есть свой знак (не все они попали в условие, но мы увидим недостающие в задании 3); для сотен отдельные знаки есть только от 100 до 400, а 500 и 600 записываются как 400 + 100 и 400 + 200; в задании 3 мы также увидим, что 700 записывается как 400 + 300, а 900 – как 400 + 400 + 100.

Значит, в западносирийском алфавите только 9 + 9 + 4 = 22 буквы, и поэтому не хватило обозначений для сотен от 500 до 900.

3. Во втором способе записи сотни от 500 до 900 обозначаются не как суммы, а знаками для десятков от 50 до 90 с точкой сверху.

217 + 718 = 935	

ЗЕРКАЛЬНАЯ КОМНАТА

(«Квантик» № 5, 2021)

Как расположить зеркала на 24 квадратиках внутри комнаты 6 × 6, показано на рисунке 1. Докажем, что комната 5 × 5 не подходит. Ясно, что ребята не могут стоять у стены, ведь с каждой из четырёх сторон должно быть кого-то видно. Аналогично, если между кем-то и стеной всего одна клетка, то в ней должно быть зеркало. Если Аня и Боря стоят как на рисунке 2, то Аня в верхнее зеркало увидит либо себя, либо Борю, которого она и так видит справа. Поэтому в восьми квадратиках вокруг центральной клетки никакие две соседние не заняты ребятами. Остаётся разобрать два случая. Если ребята стоят как на рисунке 3 или рисунке 4, то Аня не видит Даню.

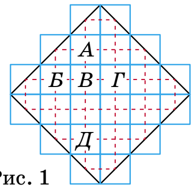


Рис. 1

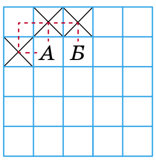


Рис. 2

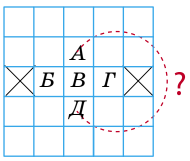


Рис. 3

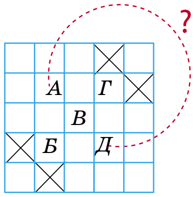
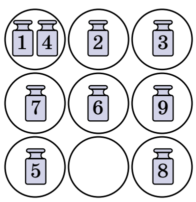


Рис. 4

ГИРИ В ПИАЛАХ

Падишах требовал разложить гирьки по пиалам, но не упомянул, что в каждой пиале должно быть *строго по одной гирьке*. И если допускается в одну пиалу положить сразу две гирьки (и одна пиала останется свободной), требования соблюсти возможно, см. рисунок.



ПЛАНЕТАРНАЯ НЕДЕЛЯ

1. Семь видимых невооружённым глазом небесных тел Солнечной системы использовались для обозначения 24 часов суток.

Пусть сутки начались с часа, связанного с X. Следующие сутки начнутся через $24 = 7 \cdot 3 + 3$ часа. Поэтому их первый час связан с тем Y, который стоит в списке небесных тел на 3-м месте после X. Начнём с Луны и будем восстанавливать порядок дней: Луна, ____ , ____ , Марс, ____ , ____, Меркурий и т.д., см. рисунок (порядок по кругу соответствует порядку названий часов, а стрелки показывают порядок названий дней).

2. Начинался порядок небесных тел с Сатурна (самого далёкого от Земли), а заканчивался Луной (самой близкой к Земле). То есть неделя начиналась с дня, связанного с Сатурном, – субботы (а заканчивалась пятницей).

Комментарий. Порядок небесных тел А, ..., Ж получился такой:

Сатурн, Юпитер, Марс, Солнце, Венера, Меркурий, Луна.

Этот порядок древние связывали с удалённостью небесных тел от Земли. Считалось, что чем больше период обращения тела по небесной сфере относительно звёзд, тем дальше оно от Земли (вокруг которой, считалось, всё вращается).

Для Сатурна, Юпитера и Марса этот период примерно равен периоду их обращения вокруг Солнца (29,5 лет, 12 лет, 687 суток). Венера же и Меркурий совершают оборот по небесной сфере примерно за 1 год, как и Солнце, потому что они ближе к Солнцу, чем Земля. Почему Венера, Меркурий и Солнце располагались в календаре именно в таком порядке, не очень понятно.

Сейчас мы знаем, что эти три тела в разные моменты времени могут располагаться в любом порядке по удалённости от Земли, а Марс бывает ближе к Земле, чем Солнце. А по расстоянию от Солнца небесные тела идут в таком порядке:

Сатурн, Юпитер, Марс, Земля вместе с Луной, Венера, Меркурий.

НЕ ЕШЬТЕ НА НОЧЬ

1. Парни в одежде привидений не отбрасывают тени – значит, они настоящие привидения.

2. Вова просто присел в углу, и огромный мяч не смог до него достать.

3. Вове надо достать бумажку и сунуть её в факел, пусть сгорит. Тогда в мешочке останется бумажка «смерть». Если в мешочке было две бумажки – «жизнь» и «смерть», а осталась только «смерть», то Вова вытащил «жизнь».

ТРИДЦАТЬ ПРОТИВ ОДНОГО

Пусть учительница покрасит границу квадрата 100×100. Дети не успеют покрасить его внутренность (внутри $2 \cdot 99 \cdot 100$ отрезков, а дети покрасят максимум $30 \cdot 400$). Получился квадрат с окрашенной границей, а внутри закрашено не всё. Далее учительница красит отрезки внутри, и за один ход до полной закраски образуется нужный прямоугольник (ведь если убрать отрезок изнутри закрашенного клетчатого квадрата, возникнет пустая «доминошка»).

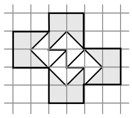
ЛАЗЕР И ЗЕРКАЛО

Стена шершавая и рассеивает свет во все стороны, поэтому пятно от лазера на стене само немного освещает всё вокруг. А рука и живот Квантика освещены через зеркало, как на рисунке.

XXXII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Избранные задачи

1. Ответ: см. рисунок.

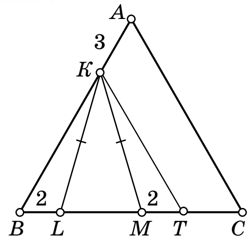


2. Ответ: 5 минут. Запустим на одном мониторе итоговый ролик, а на другом – Петино видео с конца. Мониторы будут показывать разное, пока братья не окажутся в одной точке пути, после чего они будут показывать одно и то же. Поэтому длительности этих видео равны.

3. Ответ: 21. Для каждой горизонтальной полоски отметим её левую и правую стороны, а для каждой вертикальной – верхнюю и нижнюю. Ясно, что мы по одному разу отметили все границы клеток на контуре прямоугольника и контуре дырки, то есть $50+32=82$ границы. Каждая полоска давала нам по две границы, так что всего полосок $82:2=41$. Горизонтальных среди них 20, значит, вертикальных 21.

Замечание. Это решение работает и в том случае, когда фигура и дырка (тех же периметров) имеют сложную многоугольную форму.

4. Отметим на продолжении отрезка LM за точку M такую точку T, что $MT=2$. Углы BLK и TMK равны как смежные с равными углами равнобедренного треугольника KLM. Значит, треугольники BLK и TMK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $BK=BT$, и треугольник BKT равнобедренный с углами $60°$ при основании, то есть равносторонний. Тогда $BK=BT$, а так как ABC тоже равносторонний, $BA=BC$, откуда $CT=AK=3$ (и точка T лежит именно на стороне BC, а не на её продолжении). Тогда $CM=3+2=5$.



5. Ответ: не получится. Пусть друзьям удастся осуществить желаемое. Подсчитаем, сколько всего компаний можно составить из пяти человек (столько же раз переплывёт лодка с одного берега на другой). Каждый человек может либо войти, либо не войти в компанию, поэтому всего вариантов $2^5=32$. В том числе мы учли вариант, когда никто не попал в компанию. Но лодка пустая не плавает, поэтому всего компаний $32-1=31$, нечётное число. Выходит, друзья должны переплыть реку нечётное количество раз, и в итоге лодка окажется на противоположном берегу. Значит, хотя бы один из друзей завершит катание на другом берегу, пусть это будет Вася. Посмотрим, сколько раз Вася мог переправиться. Каждый его друг может либо плыть, либо не плыть с ним, поэтому Вася входит в $2^4=16$ различных компаний (в том числе может плыть и один). Но это число чётно, то есть в итоге Вася вернётся на исходный берег. Противоречие.

6. Ответ: 800 монет. Вот пример:

Какие гири покупаем	Что взвешиваем	Сколько монет мы заплатили
1	$1=1$	100
2	$1+2=3$, $2=2$	200
4	$2+4=6$	300
1	$1+2+4=7$, $1+4=5$, $4=4$	400
8	$4+8=12$	500
1	$1+4+8=13$	600
2	$1+2+4+8=15$, $2+4+8=14$, $2+8=10$	700
1	$1+2+8=11$, $1+8=9$, $8=8$	800

Докажем, что меньшей суммы не хватит. Переходя к каждому взвешиванию, мы либо покупаем одну или несколько гирек, либо отдаём их. Поэтому мы в сумме купили и отдали $N \geqslant 15$ гирек. Но после последнего взвешивания у нас на руках есть хотя бы одна гирька, так что мы купили больше, чем отдали. Но тогда мы купили более половины от N, то есть минимум 8 гирек, а значит, заплатили не менее 800 монет.