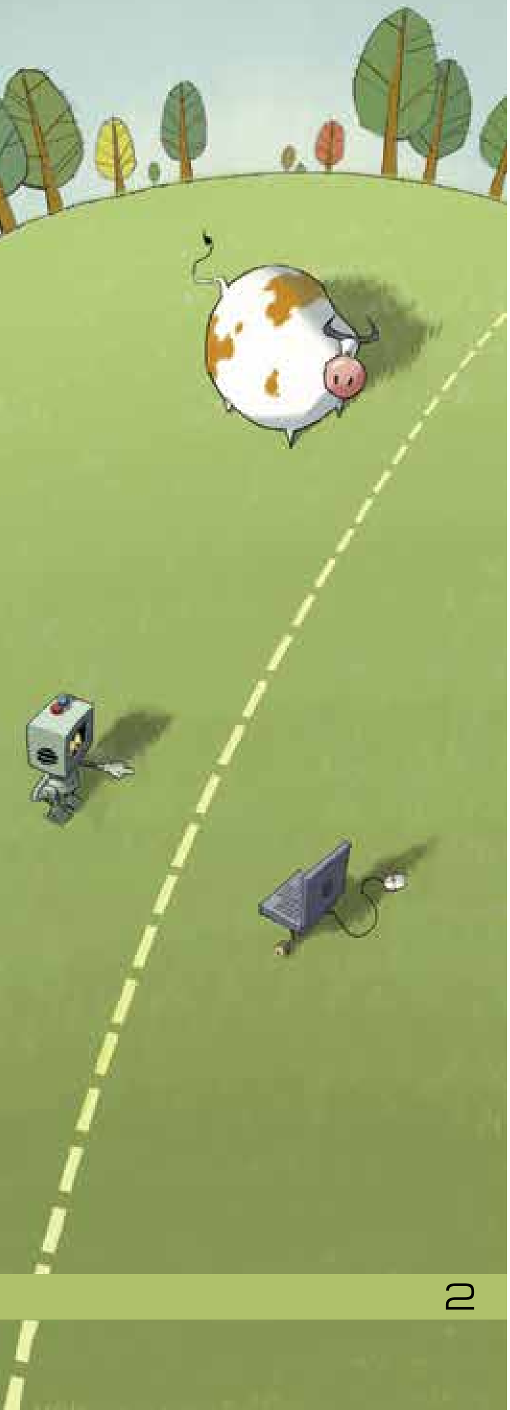
Сергей Дориченко

БЕГОТНЯ ПО ПОЛЯМ И ДОРОГАМ



Квантик и Ноутик стояли посреди огромного поля и размышляли.

– А вот интересно, куда я добегу быстрее тебя? – спросил Квантик.

– Только давай по-честному: бежим с одинаковой скоростью, – ответил Ноутик.

– Тогда ничего интересного, – сказал Квантик. – Быстрее я добегу туда, куда мне ближе, то есть в точки на моей половине поля.

– А что такое «твоя половина поля»?

– Надо соединить нас с тобой отрезком и провести к нему срединный перпендикуляр. Он разделит поле на «мою» и «твою» половины.

– И правда: если X на твоей половине, то $KX < NX$ (рис. 1). А это надо доказывать или очевидно?

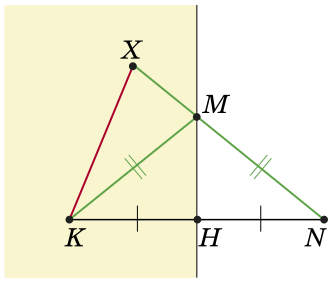


Рис. 1

– Можно вывести из того, что кратчайший путь между точками на плоскости – отрезок. Твой путь пересекается с перпендикуляром в точке M и делится на два куска NM и MX. Отрезки MN и MK равны по симметрии. Поэтому твой путь равен $KM + MX$, что больше KX (это ещё неравенством треугольника называют).

– Здорово! Хотя и занудно – и так же всё понятно.

– Тогда реши такую задачу. *Мы снова стоим в поле, но ты – на прямой дороге, идущей через поле. Как отметить ту часть дороги, куда ты добежишь быстрее? Скорости у нас равны.*

– А в чём разница? Проводим перпендикуляр и отмечаем ту часть дороги, которая в моей половине.

– Молодец. Гляди, что это там виднеется?

За телегой

– Телега едет как раз по прямой. И скорость вроде как у нас, когда мы бежим. Давай догоним?

– Погоди, сначала решим! *Телега едет из точки A по прямой l вправо с постоянной скоростью (рис. 2). Откуда её можно догнать, двигаясь с той же скоростью?*

– А бежать надо с упреждением или просто за ней?

– Просто за ней безнадёжно: скорости же равны. Пожалуй, надо выбрать точку, где мы хотим догнать телегу. И мчаться туда по прямой, это короче всего.

– Мне кажется, мы её догоним, только если мы в той части поля, которая как бы «перед» телегой.

– Я тебя понял. Рисую через точку A прямую m, перпендикулярную дороге (рис. 2). Если мы в той части, куда едет телега, то догоним её. Иначе – нет.

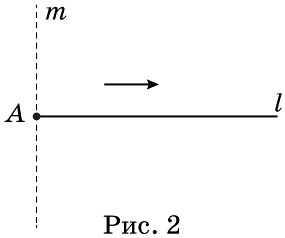


Рис. 2

– А ты теперь опять скажешь, что это надо доказывать?

– Так это почти предыдущая задача. Мы ищем точки дороги, куда можем попасть не позже телеги. Значит, соединяем наше положение B с телегой A и строим серединный перпендикуляр к AB (рис. 3).

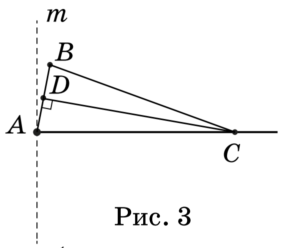


Рис. 3

– Да! Если он пересечёт дорогу – бежим в точку пересечения C (или в любую точку дороги правее C). Если не пересечёт – телегу не догнать.

– А сообразишь, как понять: пересечёт или нет?

– Ну, если мы на прямой m, перпендикуляр параллелен дороге. Если мы справа от m, перпендикуляр «наклонится» к дороге и пересечёт её. Если мы слева от m – отклонится от дороги. Так?

– Не вполне строго, но верно. Можно, кстати, чуть иначе объяснить. Пусть мы догоним телегу в точке C. Бежим в точку C по прямой. А из каких точек мы успеем в C одновременно с телегой или раньше?

– Если с той же скоростью... Телега сейчас в A... Ой, это же просто круг с центром C и радиусом CA.

– Именно. Так давай для каждой точки дороги нарисуем такой круг. Все круги вместе и дадут область, откуда телегу можно догнать. Но они все касаются прямой m и лежат справа от неё (рис. 4). Значит, ничего из левой половины не захватят. А любую точку правой половины – пожалуйста, только, может, радиус придётся огромный брать. Это потому, что...

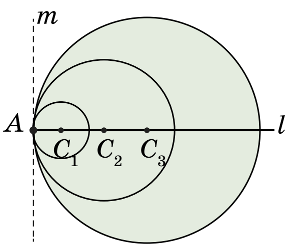


Рис. 4

– Гляди, велосипед едет! – перебил Ноутик.

Немного ускоряемся

– Он, пожалуй, раза в два быстрее движется, чем мы бегаем, – заметил Квантик. – И едет по прямой. А его мы из каких точек догоним?

– Ой. Тут уже фора какая-то нужна. Не знаю...

– Давай рассуждать как раньше. Пусть мы догоним велосипед в точке C. Бежим в точку C по прямой. Пробежать надо в 2 раза меньше, чем проедет велосипед (ну или ещё меньше). Значит... Значит, мы были в круге с центром C и радиусом $CA/2$... Рисуем в каждой точке дороги такой круг. Что все такие круги захватят?

– Какую-то часть плоскости. Она сначала узкая, потом расширяется... Может, это угол какой-то?

– Угол?.. Очень похоже! Но какой?..

Квантик и Ноутик задумались.

– Я тут взял циркуль и нарисовал несколько кругов, – прервал тишину Ноутик. – Вроде и правда они как бы угол составляют. А дорога его пополам делит. Я транспортиром измерил – похоже на 60° (рис. 5).

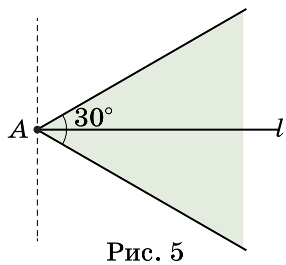


Рис. 5

– Ноутик, ты герой! Математика – это же экспериментальная наука. Итак, твой эксперимент говорит, что угол равен 60°. Полдела сделано!

– Почему?

– Мы уже знаем, что надо доказывать.

– Интересно, что легче доказать: что изнутри этого угла догоним велосипед или что извне – нет?

– Догоним не только изнутри, но и из любой точки X на границе угла. Я понял, куда надо бежать!

– Ясно куда: по перпендикуляру к дороге, так короче всего.

– Нет, нам же не просто к дороге надо, а велосипед поймать. Смотри, мы в точке X на стороне угла – значит, на границе какого-то круга. Бежать надо в его центр! Круг выступает на границу угла всего одной точкой, то есть... касается стороны угла в точке X.

– Погоди, погоди... Мы побежим по радиусу... Касательная перпендикулярна радиусу... Надо бежать перпендикулярно стороне угла???

– Именно. Проведём через X перпендикуляр к AX, он пересечёт дорогу в точке O (рис. 6). Тогда треугольник XAO с углами 30°, 90°, 60° – половинка равностороннего треугольника. Поэтому XO как раз в два раза короче, чем AO, и мы попадём в O одновременно с велосипедом.

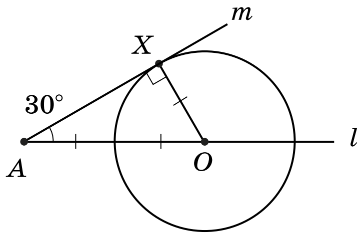


Рис. 6

– Ух ты! И круг действительно касается сторон угла. Но тогда все эти круги лежат внутри угла! Значит, из точек снаружи мы велосипед не догоним!

– Верно. Кстати, а почему догоним изнутри угла?

– Ну, это просто: из точки B бежим перпендикулярно стороне угла и успеем даже раньше велосипеда (рис. 7).

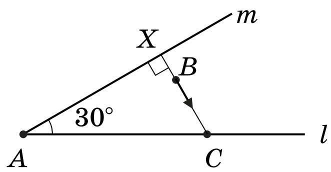


Рис. 7

Тут друзей прервал какой-то гул...

Самолёт

– Похоже на самолёт, – задрал голову Квантик. – Но я его не вижу, хотя смотрю туда, откуда звук идёт.

– Наверно, это сверхзвуковой самолёт.

– Тогда у меня задача. *Самолёт летит по прямой со скоростью, в два раза большей скорости звука. В точке A он начал испускать звук во все стороны и долетел до точки B. Где успели услышать самолёт к этому моменту?*

– Как тут рисовать, это же всё в пространстве?

– Ну мы как раз под путём самолёта стоим, и нас только вертикальная плоскость интересует, в которой мы с ним находимся.

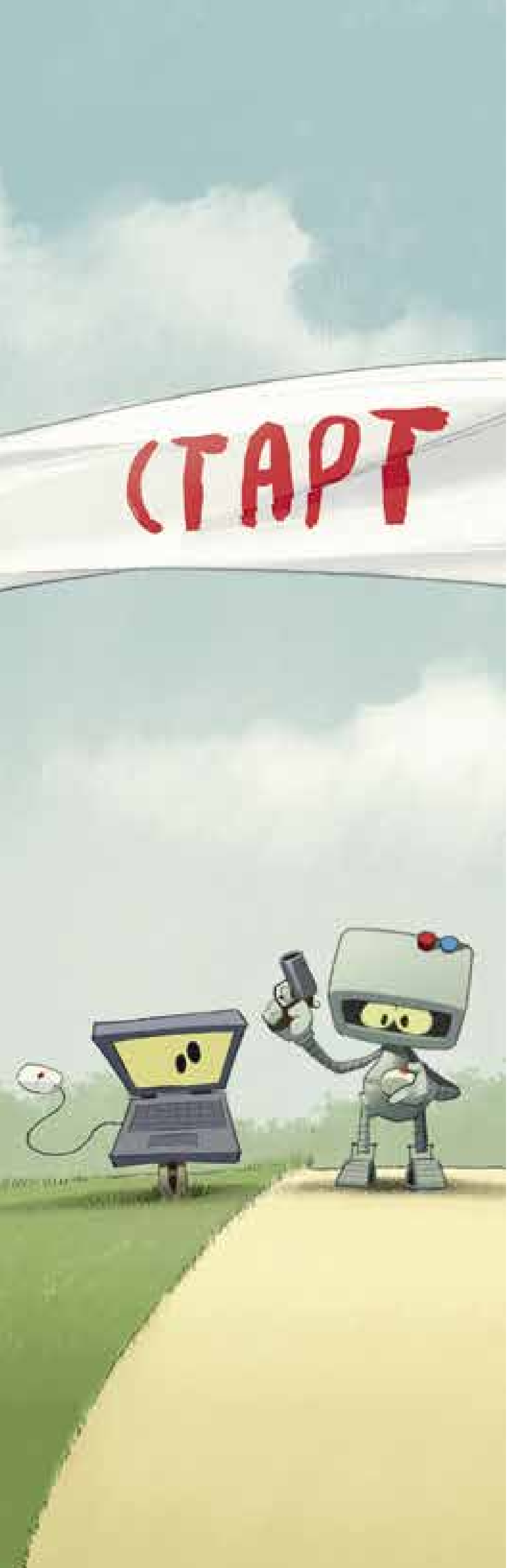
– Похоже на предыдущую задачу «наоборот»... Там мы догоняли транспорт, а тут от него звук убегает.

– А давай мысленно запустим время вспять. Самолёт полетит обратно из B в A, а звук – к самолёту.

– Так это ты решение рассказал! Рисуем угол в 60° с вершиной B...

– ... но не весь угол!

– А, ну да. Надо нарисовать не все круги... Последний круг тот, что с центром в A. Ну ясно – треугольник, и к нему полкруга приделано.



– А вот и не полкруга. Забыл? Все круги касаются сторон угла, в том числе и последний.

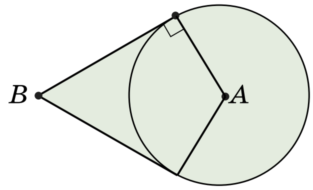


Рис. 8

Ноутик хлопнул себя по монитору и выдал верный ответ (рис. 8). Вскоре друзья выбрались на дорогу.

Одна дорога

– А по дороге гораздо легче идти, чем по полю.

– Это повод для задачи. *Ты стоишь на прямой дороге, идущей через поле. Твоя скорость по дороге – не более 6 км/ч, а по полю – не более 3 км/ч. Куда ты можешь дойти за 1 час?*

– Сложно. Я же могут сначала пойти по дороге, потом по полю, потом вернуться на дорогу...

– Нет.

– Что «нет»?

– Так идти не имеет смысла. Представь, что ты хочешь попасть в точку X. Если на пути в X ты сошёл с дороги, а потом на неё вернулся, ты шёл не оптимально: быстрее было просто идти по дороге.

– Выходит, оптимально идти – это сначала сколько-то по дороге, а потом сколько-то по полю?

– Именно.

– Ну, если всё время по дороге – это от исходной точки A по 6 км в обе стороны: получается отрезок MN длиной 12 км. А если не всё время? Иду я по дороге, а потом схожу – и уже пройду в два раза меньше, чем если бы и дальше по дороге шёл...

– Ничего не напоминает?

– Это же задача про самолёт и звук! Только теперь два самолёта летят из A: один – в M, другой – в N. – И Ноутик выдал на экране ответ (рис. 9).

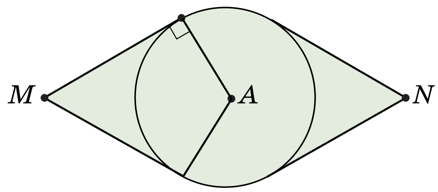


Рис. 9

– Точно, – подтвердил Квантик. – Но, кажется, мы дошли до перекрёстка.

Две дороги

– Ура, перекрёсток! Я тоже придумал задачу, – обрадовался Ноутик. – *По полю проходят две перпендикулярные друг другу прямые дороги. Ты стоишь* *на перекрёстке, твоя скорость по дорогам – не более 6 км/ч, а по полю – не более 3 км/ч. Куда ты можешь попасть за 1 час?*

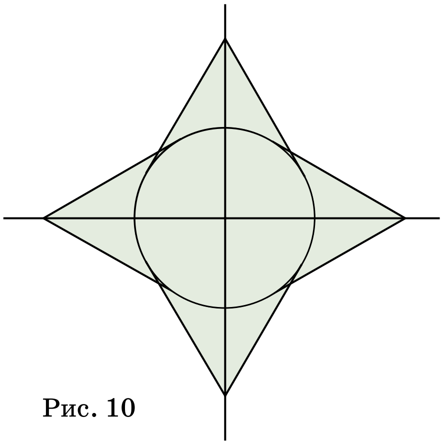


Рис. 10

Друзья сверили свои ответы (рис. 10).

– Ну да, объединяем два «прошлых» рисунка. Кстати, границы получились прямые, – заметил Квантик. – А может быть так, что круг наружу выступит?

– Пожалуй, так будет, если в поле скорость не в два раза, а только чуть-чуть падает.

– Согласен. Пограничный случай – когда на дороге скорость больше в $\sqrt{2}$ раз.

– Чем это он пограничный?

– А ты нарисуй ответ, удивишься.

– Ладно, дома попробую.

Хитрая задача

Дома Квантик и Ноутик увлеклись такой задачей:

Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямой дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от A. Скорость пешехода на дороге – 5 км/ч, а в лесу – 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

– Так, так, так... Опять делаем наоборот, – предложил Ноутик. – Как быстрее всего попасть из B в A? Если знать, сколько времени мы идём, можно картинку нарисовать, как раньше с одной дорогой, куда попадём за это время. Но время как раз и неизвестно. Что же, рисовать картинки для разных времён, пока точку A не захватим? И ещё угол будет другой, у нас же скорости относятся как 3 к 5.

– Сам угол нарисовать легко: пририсовываем к дороге прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Вычислять угол не надо, время надо найти.

– И как дальше?

– А пусть читатели журнала сами дорешают! А мы своё решение в конце номера напишем.

Так они и сделали.

Художник Алексей Вайнер