



ОТ РЕДАКЦИИ. Издательство МЦНМО выпустило уже несколько переизданий замечательной книги Виктора Уфнаровского «Математический аквариум». Вот названия первых глав: «На газете до Венеры», «Искусство обозначать, или принцип бяки», «Умение сделать вид», «Как бороться с модулями, или искусство перебора», «О противных доказательствах», «Как считать, чтобы не считать».

А вот несколько небольших отрывков из главы о графах.



Уфнаровский В.А. Математический аквариум. — М.: МЦНМО, 2016

ИХ СИЯТЕЛЬНОСТЬСТВО ГРАФ

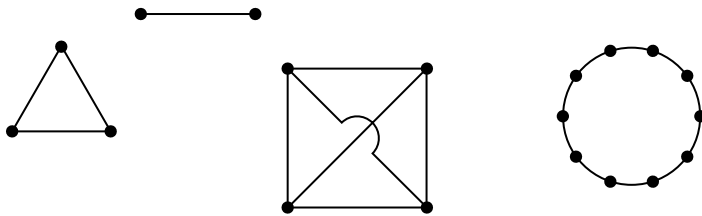
Как можно без содрогания помыслить о бедствиях, которые способна причинить хотя бы одна опасная связь!

Шодерло де Лакло. Опасные связи
(пер. Н. Рыкова)

Мы начинаем главу об одном из самых гордых (по названию) обитателей математического аквариума — о графе. Под этим красивым и благозвучным словом скрывается удивительно простое и понятное определение. Граф — это всего-навсего несколько точек, часть из которых друг с другом соединены (не обязательно отрезками, можно просто линиями или же вообще ничем, лишь бы они считались соединёнными). Точки называются вершинами, соединяющие линии — рёбрами графа. Например, на любой треугольник мы можем смотреть как на граф, у которого три вершины и три ребра. Отрезок — это граф с двумя вершинами и одним ребром. Возьмём квадрат и проведём в нём две диагонали, причём не будем обращать внимания на точку пересечения диагоналей, как бы считая, что они не пересекаются. Тогда получим граф с четырьмя вершинами и шестью рёбрами. Если на окружности нарисуем девять точек, получим граф с девятью вершинами и девятью рёбрами, которыми

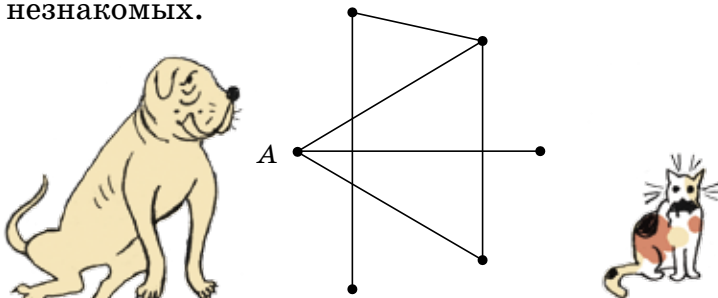


будут служить дуги окружности. Две изолированные точки – это тоже граф с двумя вершинами и без рёбер. Ещё приятнее строить граф в пространстве: там всегда можно добиться того, чтобы соединяющие линии не пересекались (в пространстве больше места).



Примеры графов

Задача. Доказать, что из шести любых людей найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.



К задаче о знакомствах

Поиск решения. Самая главная неприятность в задаче – слишком «нематематическая» постановка вопроса. Что значит «знакомы»? Как это строго записать, какой формулой? А может, и не формулой вовсе, а геометрически? А что, если граф поможет? Надо как-то попробовать поставить в соответствие задаче граф, тогда она, по крайней мере, станет «виднее». Значит, так. Берём шесть точек (по точке на каждого человека) – это вершины. А рёбра будем строить так: если люди знакомы между собой, то и точки соединим. Не знакомы – не соединяем. Хорошо! Как же теперь выглядит наша задача в такой интерпретации? А вот как: в любом графе с шестью вершинами найдутся либо три попарно соединённые вершины (по существу, треугольник, хотя, быть может, с кривыми сторонами), либо три попарно не соединённые вершины. Чисто геометрически это довольно ясно: если линий много, то должен быть треугольник, а если мало, то должны появиться три



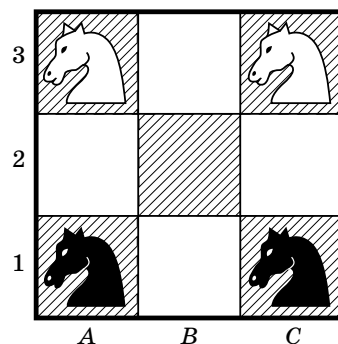


не связанные между собой вершины. Попробуем это как-то более тщательно обосновать. Допустим, что линий много. Например, из одной вершины их выходит более половины возможного. Всего возможно пять, так как остальных вершин осталось пять, а более половины – это три. Итак, пусть из одной вершины выходит три ребра. Рассмотрим вершины, лежащие на другом конце этих рёбер. Если какие-то две из них соединены, то и получаем треугольник вместе с двумя рёбрами, соединяющими их с исходной вершиной. Значит, они не соединены и... всё, что надо, получено – нашли три вершины, попарно не соединённые. С этим случаем разобрались.

Случай, когда рёбер меньше, мы оставим читателю. Заметим только, что этот случай совершенно аналогичен уже рассмотренному. Маленькая подсказка в форме вопроса: что мы получили бы, если бы строили граф наоборот, соединяя те вершины, которые соответствуют незнакомым людям? (Такой граф, кстати сказать, называют дополнительным к исходному.)

Что же выяснилось из этого решения? Мы поняли, где и зачем нужен граф. Граф приходит на помощь тогда, когда имеются какое-то множество и связи между его элементами. При этом характер связей несуществен, а важен только один вопрос: есть связь или её нет. Именно эту ситуацию и отражает адекватно граф. Преимущества такого подхода понятны: мы можем привлечь неплохо развитую у человека геометрическую интуицию, мы можем что-то *увидеть*, а значит, лучше оценить.

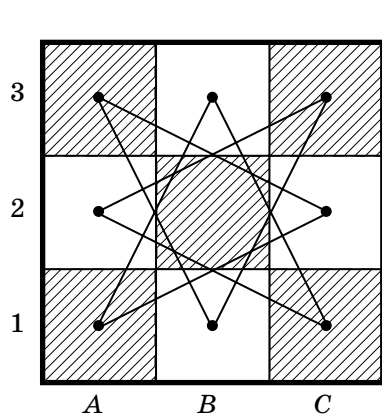
Задача. На шахматной доске 3×3 стоят по углам снизу два чёрных коня, сверху – два белых (см. рисунок). За какое наименьшее количество ходов белых и чёрных коней можно поменять местами?



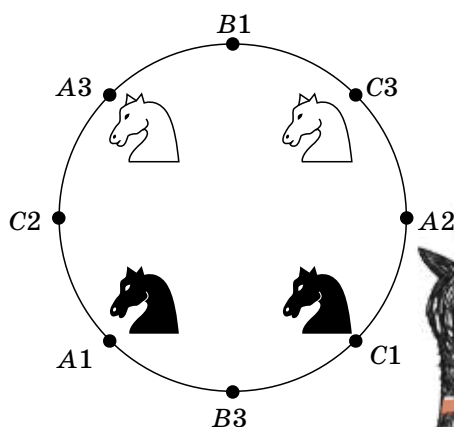
Как поменять коней местами?



Поиск решения. Сравнительно быстро можно указать одного из нескольких возможных кандидатов на кратчайшую перегруппировку кавалерии. Но вот как можно было бы доказать, что не может быть ничего короче? Это – вопрос вопросов. Попробуем проанализировать схему коммуникаций. Каждая клетка связана ровно с двумя другими. Связана... А ведь связь – это слово «графское». Не пора ли припомнить теорию графов? Попробуем. Рассмотрим граф с восемью вершинами, каждая из которых отвечает одной из клеточек на краю доски (центральную клетку не будем рассматривать: в неё всё равно не попасть). И нарисуем граф связей. Ой, какой красивый граф получается: окружность и на ней восемь точек. Значит, наши ходы конём с этой точки зрения – сдвиг по дуге окружности. А вот в такой интерпретации совершенно ясно, как убедиться, что выбранный способ перегруппировки минимальный (как, читатель, действительно ясно?).

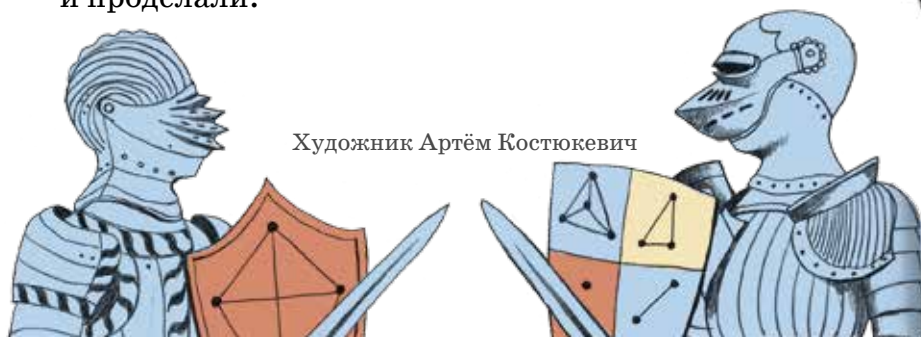


Граф связей



Кони бегут по кругу

Метод, который мы сейчас привели, по существу есть метод нити и пуговиц, состоящий в следующем: пришить пуговицы, стоящие на клеточках, друг к другу нитками в соответствии со связями. Затем всю эту комбинацию приподнять и распутать, что мы и проделали.



Художник Артём Костюкевич

