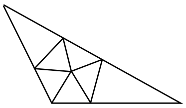
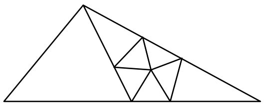
НАШ КОНКУРС, X тур
(«Квантик» № 6, 2021)

46. *Петя пытался разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные треугольники, но у него ничего не получалось. В какой-то момент он узнал из одной книги, что такое разрезание возможно для 7 треугольников (см. рисунок). А можно ли разрезать какой-нибудь тупоугольный треугольник на 8 остроугольных треугольников?*



Ответ: да. Надо сначала разрезать треугольник на два, проведя разрез через вершину *тупого* угла так, чтобы получился *остроугольный* и *тупоугольный* треугольники, а потом применить для нового тупоугольного треугольника разрезание на 7 остроугольных треугольников (см. рисунок). Если нужно получить ещё больше остроугольных треугольников, применяем это правило к новому тупоугольному треугольнику, и т.д.

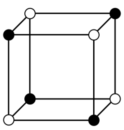


47. *а) Ноутик записал по числу в вершинах треугольной пирамидки и про каждое из шести её рёбер сообщил Квантику, какова сумма чисел на концах этого ребра. Как Квантику восстановить числа в вершинах? б) Удастся ли однозначно восстановить числа, если Ноутик запишет числа в вершинах куба и сообщит сумму на каждом ребре?*

Ответ: а) да; б) нет.

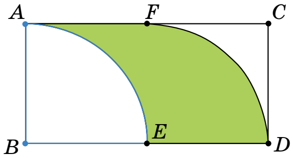
а) Сумма чисел на паре противоположных рёбер равна сумме чисел во всех вершинах. Теперь сложим числа на рёбрах, исходящих из одной вершины, скажем, A. В полученной сумме вершина A учтена трижды, а остальные – единожды. Вычтя уже известную сумму чисел во всех вершинах и поделив пополам, найдём число в вершине A. Аналогично для остальных вершин.

б) Покрасим вершины куба в шахматном порядке (см. рисунок). Если мы уменьшим числа в белых вершинах на 1, а в чёрных – увеличим на 1, числа на рёбрах не изменятся.



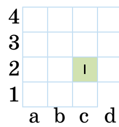
48. *Дан ржавый циркуль с фиксированным раствором 10 см. С его помощью нарисуйте несколько линий на прямоугольнике 10 см × 20 см так, чтобы после разрезания по этим линиям среди кусков нашлась фигура площади 100 см².*

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ короткая сторона – это AB. Проведём дугу с центром в вершине B (см. рисунок). Она пройдёт от вершины A до середины E стороны BD. Теперь проведём дугу с центром в E от вершины D до середины F противоположной стороны. Площадь полученной фигуры $AEDF$ будет равна половине площади прямоугольника. Действительно, оставшиеся части при совмещении образуют квадрат со стороной 10 см.

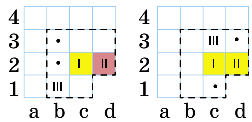


49. *На экране дан белый клетчатый квадрат 4×4 без угловой клетки. Одна из оставшихся 15 клеток призовая. За одну попытку игрок нажимает на любую клетку, и та становится зелёной, если она призовая, жёлтой, если призовая клетка соседняя (по стороне или углу), и красной иначе. Может ли игрок наверняка узнать, какая клетка призовая, после трёх попыток?*

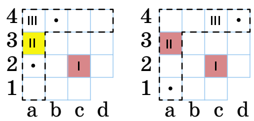
Ответ: да. Введём координаты на нашей доске как на шахматной (по горизонтали a–d, по вертикали 1–4) и будем считать, что удалена клетка d1. Первым ходом нажимаем на c2.



0-й случай: c2 зелёная – конец. С этого места мы опускаем разбор тех случаев, когда кнопка, на которую мы нажали на некотором ходу, зелёная.



1-й случай: c2 жёлтая. Тогда вторым ходом нажимаем на d2. Если d2 красная, то призовая b1, b2 или b3. Тогда, нажав третьим ходом на b1, мы сможем определить призовую. Если же d2 жёлтая, то призовая на c1, c3 или d3. Нажимая последним ходом на c3, мы определим, где призовая.



2-й случай: c2 красная. Тогда призовая клетка либо на вертикали a, либо на горизонтали 4. Нажимаем на a3. Если она жёлтая, то призовая клетка a2, b4 или a4, и третьим ходом мы определим, где призовая, нажав на a4. Если a3 красная, осталось три клетки на выбор: a1, c4 и d4. Тогда нажимаем на c4 и по её цвету определим, где призовая.

50. *В строку записаны несколько букв О и Р в произвольном порядке (назовём это «словом»). Первым ходом между каждыми двумя соседними буквами исходного слова впишем дополнительные буквы по таким правилам:*

• *если соседние буквы одинаковые, между ними вписывается О;*

• если соседние буквы разные, между ними вписывается Р.

Вторым ходом по тем же правилам впишем буквы между каждыми двумя соседними буквами полученного слова, и т.д. (например: ООР, ОООРР, ОООООРРОР, ...). Пусть мы начали со слова ОР и сделали 55 ходов. Каких букв – О или Р – будет в получившемся слове больше и во сколько раз?

Ответ: букв Р будет в 2 раза больше, чем О.

После первого хода на доске будет написано ОРР, после второго – ОРРОР, после третьего – ОРРОРРОРР. Докажем, что и дальше после нечётных ходов слово на доске будет состоять из подряд идущих троек ОРР, а после чётных ходов – несколько троек ОРР и в конце ОР.

Если в слове есть тройка ОРР, после которой идёт ещё одна буква О, эта тройка превратится в ОРРОРР (мы учли букву, которая появится после тройки, а букву перед тройкой не учитываем). Если тройка ОРР – последняя, она превратится в ОРРОР. Если же на конце слова была лишь пара ОР, она перейдёт в тройку ОРР. Значит, после всех чётных ходов на доске будет слово вида ОРР ОРР ... ОРР ОР, а после нечётных – слово вида ОРР ОРР ... ОРР.

Тогда после 55-го хода слово на доске будет разбиваться на тройки ОРР, а значит, букв Р в нём будет ровно в 2 раза больше, чем О.

КОСЫЕ КВАДРАТЫ: ОТ ПИФАГОРА ДО ФЕРМА («Квантик» № 7, 2021)

1. а) 2 клетки; 5 клеток.

б) Да: возьмём квадрат площадью 2 клетки из п. а) и увеличим его сторону в 10 раз.

2. Нет: разделим клетку пополам. Но эта площадь – всегда целое или полуцелое число. *Указание:* докажите это сначала для треугольников (а треугольник легко вписать в прямоугольник).

3. а) Квадрат, чья сторона – диагональ квадрата площади N, состоит из четырёх половинок исходного. Его площадь равна $2N$.

б) Если $2N$ – сумма двух нечётных квадратов, то на клетчатой бумаге можно нарисовать квадрат площади $2N$, причём центр этого квадрата тоже лежит в узле сетки. А квадрат со стороной от вершины исходного квадрата до его центра как раз будет иметь площадь N.

Приведём и чисто алгебраические решения.

а) Записав рядом формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+$ $+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, можно сообразить, что если $N=a^2+b^2$, то $2N=(a+b)^2+(a-b)^2$.

б) Ту же формулу можно переписать в виде $\frac{N}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Если a и b одной чётности, то числа в скобках целые.

4. Нарисуем поверх старых клеток новые – из квадратов площади M. По условию, мы можем нарисовать квадрат площади N новых клеток – его площадь будет MN (старых) клеток.

И снова можно решить задачу и чисто алгебраически. Если $M=a^2+b^2$, $N=c^2+d^2$, то $MN=$ $=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd+$ $+2abcd+a^2d^2+b^2c^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

Пожалуй, геометрическое решение проще.

5. Любое целое положительное число представимо в виде суммы четырёх квадратов (но доказать это совсем не просто!).

КОЛЬЦЕВАЯ ДОРОГА («Квантик» № 7, 2021)

Когда поезд движется по кольцу, одна сторона колёс изнашивается больше другой, и колёса приходится обтачивать. Чтобы делать это реже, полезно периодически менять сторону, которой поезд обращён к центру кольца. Интересно, что история взята из жизни: на Московском центральном кольце в депо не предусмотрена возможность разворота, поэтому каждую ночь один из поездов едет за город к окружной железной дороге, чтобы просто развернуться.

БЕГОТНЯ ПО ПОЛЯМ И ДОРОГАМ

Время будет наименьшим, когда A попадёт на границу области, как на рисунке 1 (AK проходим по полю и KB – по дороге). Время при этом будет таким же, как если пройти MB по дороге. По условию, $AB=13$ и $AH=5$, откуда $HB=12$. Так как по дороге идти в 5/3 раза быстрее, угол α таков, что если $AK=3x$, то $MK=$ $=5x$, откуда $MA=4x$ (по теореме Пифагора), то есть стороны прямоугольного треугольника с углом α относятся как $3:4:5$. Но и в треугольнике MAH тогда $MH:AH=4:3$, то есть $MH=\frac{5\cdot4}{3}$, откуда $MB=MH+HB=\frac{20}{3}+12=\frac{56}{3}$, а искомое время равно $\frac{56}{15}$ ч.

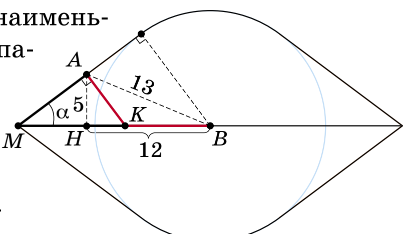


Рис. 1

Вот идея чуть другого решения. Отложим угол α от точки B. Тогда идти KB по дороге – то же самое, что пройти KX по полю (рис. 2, $KX\perp XB$),

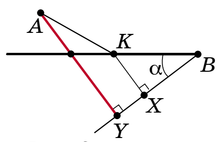


Рис. 2

и нам достаточно минимизировать путь $AK+KX$ по полю. Ясно, что для этого надо опустить перпендикуляр AY на сторону угла.

УМ БЕЗ МОЗГА, или ПОЧЕМУ ДЕМОКРАТИЯ ЛУЧШЕ ДИКТАТУРЫ

1. В кипячёной воде, даже после её полного остывания, нет или очень мало кислорода. Простейшие в ней просто задохнутся.

2. Быстрее добраться до бактерий и не погибнуть в кислоте инфузория сможет при наличии:

– отрицательного хемотаксиса на соль (NaCl);

– отрицательного хемотаксиса на кислоту;

– положительного хемотаксиса на выделения бактерий.

Ещё могут помочь слабые (!) положительные электро-, гео- и фототаксисы. Но если они окажутся сильнее положительной реакции на бактерий, то могут «не пустить» инфузорию к пище.

3. Бактерии должны обладать по меньшей мере отрицательным термотаксисом. Иначе, плывя в сторону увеличения концентрации сероводорода, они сварятся в кипятке.

Другое решение: при превышении определённой концентрации сероводорода реакция на него сменяется с положительной на отрицательную. Но это явно хуже – если H_2S мало, а вода горячая, бактерия может и погибнуть.

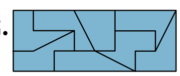
С ГРУЗИНСКОГО НА РУССКИЙ

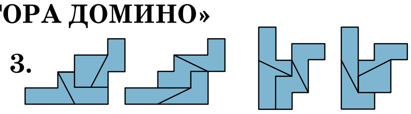
Едва ли не единственный из известных городов мира, название которого состоит из трёх частей, – Рио-де-Жанейро; его можно отождествить с грузинским словом с двумя дефисами. Теперь мы знаем достаточно букв, чтобы пытаться отождествлять и другие названия. Например, перед Рио-де-Жанейро в таблице находится город *ни...-иор...и*, то есть, очевидно, Нью-Йорк. Ещё один город с дефисом – *...ан-...ран...и...ко*, очевидно, Сан-Франциско. Значительная часть оставшихся городов отождествляется уже почти автоматически: *...ондони* – Лондон, *...ерлини* – Берлин (тут уже можно заметить, что названия, по-русски заканчивающиеся на согласный, по-грузински кончаются на *-и*), *...окио* – Токио, *...елсинки* – Хельсинки, *буда...е...ти* – Будапешт, *хамбурги* – Гамбург, *ере...ани* – Ереван, *...билиси* – Тбилиси (с каким-то не таким «*т*», как в Токио). Остались города: *пари...и*, очевидно, Париж, хотя надо заметить, что по-грузински в этом слове не тот же звук, что в Рио-де-Жанейро; *роми* – очевидно, Рим (ср. названия этого города на европейских языках, например английское *Rome* или немецкое *Rom*); *москови* – Москва (ср. европейское название Русского царства «Московия»). Сложнее всего перевести название *атени*, однако можно догадаться, что это Афины (ср. англ. *Athens*).

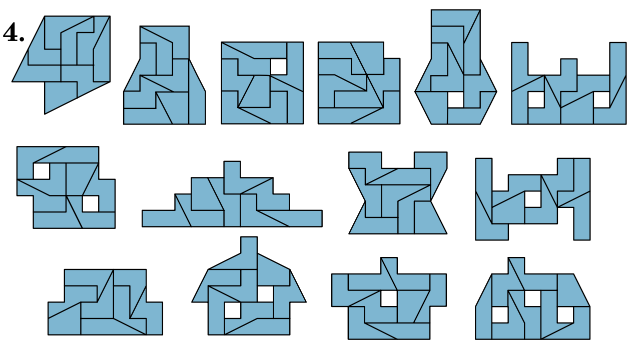
На самом деле буква ზ читается как [з], буквы პ, ტ и კ обозначают звуки [п], [т] и [к], произносимые с особым движением гортани вверх (обозначим их за [п'], [т'] и [к']), а буквы ფ и თ – звуки [п] и [т] с придыханием (обозначим их за [пˣ] и [тˣ]).

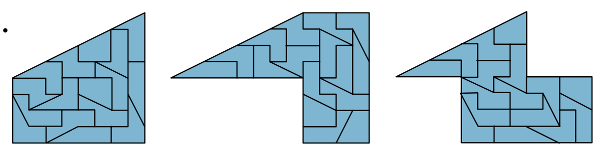
ლონდონი	лондони	Лондон
პარიზი	п'аризи	Париж
ბერლინი	берлини	Берлин
ტოკიო	т'ок'ио	Токио
სან-ფრანცისკო	сан-пˣран-циск'о	Сан-Франциско
რომი	роми	Рим
ნიუ-იორკი	ниу-иорк'и	Нью-Йорк
რიო-დე-ჟანეირო	рио-де-жане-иро	Рио-де-Жанейро
ჰელსინკი	хелсинк'и	Хельсинки
ბუდაპეშტი	будап'ешт'и	Будапешт
მოსკოვი	моск'ови	Москва
ჰამბურგი	хамбурги	Гамбург
ათენი	атˣени	Афины
ერევანი	еревани	Ереван
თბილისი	тˣбилиси	Тбилиси

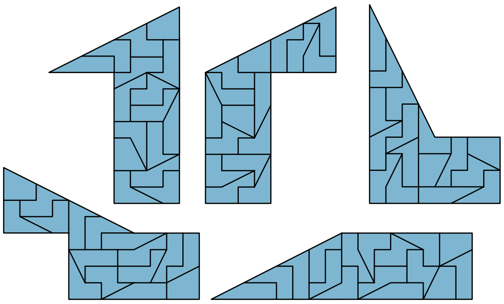
ДОМИНО ОТШЕЛЬНИКА – 2, ИЛИ «ПОЛТОРА ДОМИНО»

2.


3.


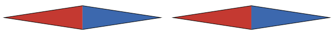
4.


5.




ЗАДАЧИ ПРО МАГНИТЫ

1. У магнитов притягиваются разноимённые полюса – южный к северному. А одноимённые (например, южный и южный) отталкиваются. Поставленные рядом два компаса развернутся стрелками друг к другу, «нос в хвост»:



Ровно так же выстраиваются и опилки – они «сцепляются» друг с другом своими маленькими магнитными полями. Вся цепочка вытянута вдоль линии магнитного поля – от северного полюса большого магнита к южному, как стремится вытянуться каждая опилка-магнит.

Итак, большой магнит только намагничивает опилки, а их смещение по листу бумаги вызвано их магнитным взаимодействием с соседними магнитиками-опилками.

2. Провода с током создают вокруг себя магнитное поле. Это магнитное поле отклоняет стрелку компаса в направлении, перпендикулярном направлению проводов ЛЭП.

3. Одинаковые полюса магнитов отталкиваются, разные – притягиваются. Поэтому северный конец магнита-стрелки компаса притягивается к южному полюсу магнита-Земли. Он находится примерно в 5 градусах от географического Северного полюса, и его называют Северным магнитным полюсом. Но это лишь название, на самом деле этот полюс магнита-Земли – южный! А северный находится в Антарктиде.

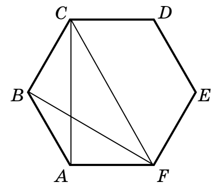
4. Ключевое слово в формулировке закона электромагнитной индукции – ***изменение*** магнитного поля. Ток через провод (и через амперметр) шёл только при включении и выключении электромагнита; в остальное время магнитное поле было большим, но не менялось, и тока не было. По легенде, пока Фарадей работал один, он, включив электромагнит, бежал в другую комнату, чтобы посмотреть на амперметр – за это время возникший при включении кратковременный ток прекращался. Когда появился помощник, он мог включать магнит, а Фарадей – смотреть в это время на стрелку амперметра и заметить, как она на секунду качнулась.

Нам не удалось найти подтверждение этой легенды. Но поиски Фарадея действительно увенчались успехом после того, как он догадался, что всё дело в изменении магнитного поля.

ТРЕУГОЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПИКА

В разбиении плоскости на прямоугольные треугольники уберём все горизонтальные и вертикальные прямые. Получится квадратная сетка, образованная пересекающимися наклонными прямыми, в ней каждый квадрат «склеен» из двух прямоугольных треугольников (и «пропавших» узлов нет!). Площадь такого квадрата равна $2s_0$, и потому формула Пика выглядит точь-в-точь как для сетки из правильных треугольников:

$$S(В, Г) = (В + 0{,}5Г - 1) \cdot 2s_0 = (2В + Г - 2) \cdot s_0$$



А для шестиугольной сетки аналога формулы Пика нет! Чтобы в этом убедиться, рассмотрим одну шестиугольную ячейку $ABCDEF$ сетки (рисунок справа). Сравним треугольники ABF и ACF. У них основание AF – общее, но третьи вершины (B и C) находятся на *разных* расстояниях от прямой AF. Тогда площади их заведомо *различны*. С другой стороны, количества точек, попавших на границу и внутрь каждого треугольника, одинаковы: $Г = 3$, $В = 0$. Поэтому аналог формулы Пика (если бы он существовал) дал бы одинаковые значения их площадей. Противоречие!

ЖАРКО И ЕЩЁ ЖАРЧЕ

Закрытая одежда предохраняет кожу от солнечного излучения и от обезвоживания. Она изолирует тело от потока горячего воздуха – так же, как мы зимой защищаемся одеждой от холодного воздуха. Плотная ткань, даже чёрная, хоть и сильно нагревается снаружи, не передаёт этот жар внутренним слоям ткани и коже.

При этом одежда должна быть достаточно свободной, чтобы воздух внутри мог циркулировать и позволять поту испаряться. Именно при испарении пота кожа охлаждается.

Плотная одежда также нужна обитателям пустынь для защиты от колючих кустарников, насекомых и скорпионов. Кстати, ночью в пустынях бывает довольно холодно, и тёплая плотная одежда опять же не помешает.

В наших широтах жара не такая сильная (но и у нас можно обгореть летом на жарком солнце).