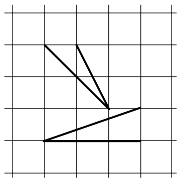
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СЕТКИ

Илья Сиротовский



Вечером трудно найти более приятное занятие, чем не спеша порешать геометрическую задачку.

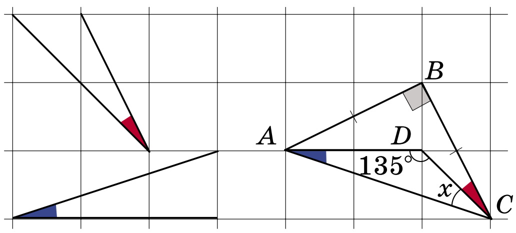
– Попробуй вот такую решить. – Полина нарисовала на клетчатом листке два уголка.

– Нужно доказать, что эти уголки равны.

Упражнение 1. Попробуйте сами решить эту задачу, прежде чем читать дальше. Есть очень много разных решений.

Стёпа начал думать и что-то рисовать. Прошло около получаса, прежде чем он показал сестре изрисованный листок.

– Я их вот так приложил.



– Здесь треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, значит, угол ACB равен 45°. А отсюда понятно, что красный уголок равен $45° - x$, а синий равен $180° - 135° - x$. Значит, они равны!

– Похоже на правду. – Полина изучала листок. – Интересное решение! Совсем не похоже на авторское.

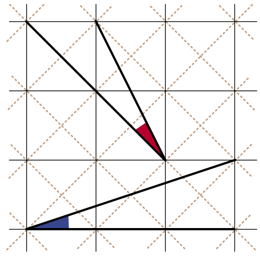
– А какое авторское? И кто автор?

– Автор задачи В. В. Произволов, а авторское решение – через подобие.

– Я не знаю, что это, – сказал Стёпа.

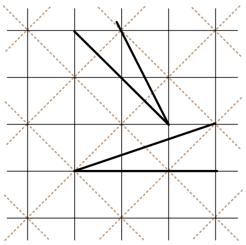
– Ну смотри, синий уголок – это угол, который образуется, если сдвинуться на три клетки вправо и на одну вверх. И нам на самом деле не важно, какого эти клетки размера.

– То есть нам надо понять, что красный угол – это тоже сдвиг 3 на 1. Но нам нужны какие-то другие клеточки...



– Вот именно! Надо их нарисовать. – Полина дочертила несколько новых линий.

– Да. Теперь видно, что это тоже угол напротив мень-



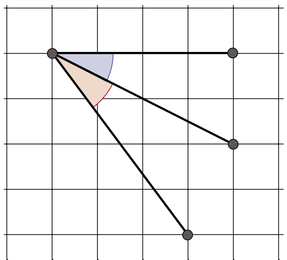
шего катета в прямоугольном треугольнике с катетами 1 и 3.

– Можно было ещё и на такой сетке увидеть. – Степан нарисовал картинку.

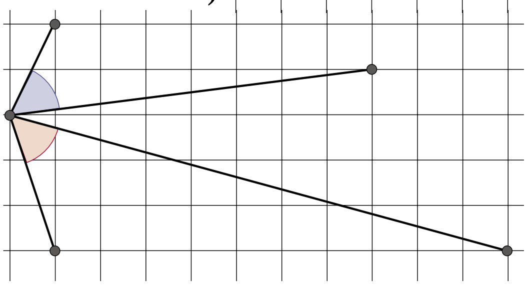
Но тогда уже синий угол – это угол между диагональю новой клетки и диагональю прямоугольника 1×2.

Так можно же кучу равных углов нарисовать. Вообще можно любой угол отложить, просто на новой сетке – и задачка готова!

Упражнение 2. Докажите равенство углов на рисунках.



а)



б)

– А вот интересно. – Полина задумалась. – Можно ли построить угол, равный данному, но только на клетчатой бумаге.

– Конечно, можно, я же только что построил кучу равных.

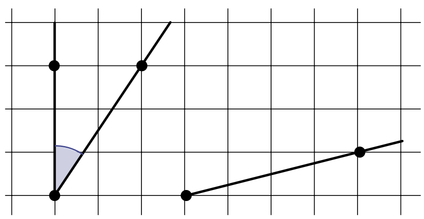
– Я имею в виду, что угол нужно отложить от заданного луча в заданную полуплоскость.

– А, это как на уроках.

– Почти, только циркуля у нас нет, а все линии проведены через какие-то два узла сетки.

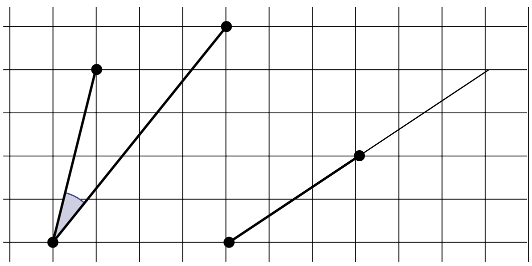
– Давай попробуем, только начнём с простого варианта – одна из сторон угла пусть идёт по линии сетки.

Задача 1. Отложите углы, равные данному, от данного луча в обе полуплоскости.



Подсказка. Удобно взять *вспомогательную* сетку так, чтобы линия новой сетки совпадала бы с линией луча.

Задача 2. Отложите угол, равный данному, от данного луча в нижнюю полуплоскость.



Подсказка. Попробуйте свести задачу к предыдущей.

На следующий день Степан вернулся к идее вспомогательных сеток.

– Получается, что если мы на новой сетке построим треугольник с такими же параметрами, то углы у него будут такими же, а все стороны увеличатся или уменьшатся в одинаковое число раз.

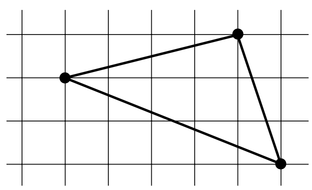
– Ровно во столько раз, во сколько изменится сторона клетки, – добавила Полина. – А как ты думаешь, во сколько раз изменится площадь фигуры?

Стёпа задумался.

– Ну если сторону квадрата увеличить, например, в 2 раза, то его площадь увеличится в 4 раза. Наверное, если увеличить сторону в n раз, то площадь увеличится в n^2 раз. По крайней мере для квадратов это верно.

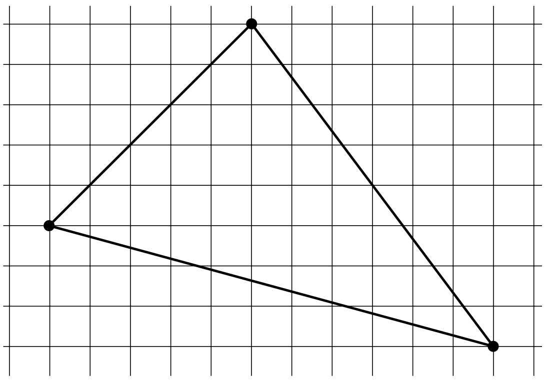
– Действительно, так. Если говорить не очень строго, то это следует из того, что любую фигурку можно почти полностью разбить на пиксели – очень маленькие квадратики.

Задача 3. Постройте треугольник, подобный данному, с вершинами в узлах сетки, но площадью а) в 2 раза больше, б) в 5 раз больше, в) в 10 раз больше.



Подсказка. Какую нужно выбрать вспомогательную сетку, чтобы площадь увеличилась в нужное число раз?

Задача 4. Постройте треугольник, подобный данному, с вершинами в узлах сетки, но площадью а) в 1,3 раза больше; б) в 1,7 раз больше; в) в 2 раза меньше.



Подсказка. Кажется, что, когда строили этот треугольник, воспользовались какой-то другой сеткой, а потом её стёрли. Попробуйте восстановить эту сетку.

Задача 5. (*«Квантик» № 1, 2021, «Наш конкурс», задача 24*). Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольный треугольник с целыми сторонами так, чтобы его вершины лежали в узлах сетки, но ни одна из его сторон не проходила по линиям сетки.

Подсказка. Вспомните про египетский треугольник, причём два раза: один раз, когда будете строить вспомогательную сетку, а второй раз – когда будете строить искомый треугольник.

Задача 6. (*М. Евдокимов, ММО 2015, 10 класс*). Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги раскрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть X – треугольник площади S с вершинами в узлах сетки. Покажите, что есть такой подобный X треугольник с вершинами в узлах сетки, что площадь его белой части равна площади чёрной части и равна S.

Определение. Если площадь клетки вспомогательной сетки равна a, назовём такую сетку *a-сеткой*.

Упражнение 3. Постройте на клетчатой бумаге 0,5-сетку; 0,2-сетку.

Задача 7. Пусть на клетчатой бумаге можно построить a-сетку и b-сетку. Докажите, что в этом случае на клетчатой бумаге можно построить также ab-сетку и a/b-сетку.

Ответы в следующем номере

Художник Екатерина Ладатко