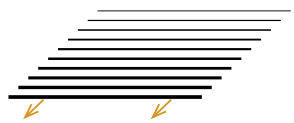
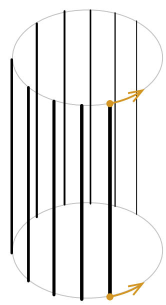
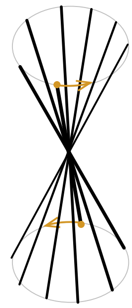
Николай Андреев,
Максим Прасолов

ЛИНЕЙЧАТЫЕ, НО НЕ ПЛОСКИЕ

Представьте себе, что вы держите в руке палку и перемещаете её в пространстве. А потом «закрашиваете» все точки, по которым «проехала» палка. Так можно «нарисовать», например, обычный стол. То есть поверхность стола – плоскость – может быть получена движением прямой. Цилиндр – это поверхность, образованная движением прямой по окружности. Конус – поверхность, образованная вращением прямой вокруг пересекающейся с ней осью. И кажется неудивительным, что и цилиндр, и конус можно получить сворачиванием плоского листа бумаги.

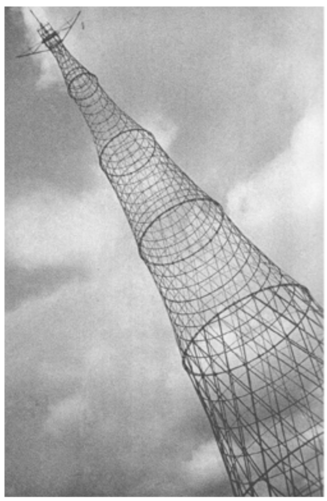






Поверхности, образованные движением прямой, называют *линейчатыми*, а саму эту прямую – *образующей*. А так ли неудивительно, что линейчатую поверхность конуса и цилиндра можно свернуть из листа? Любую ли линейчатую поверхность можно получить сворачиванием листа бумаги? Оказывается – нет.

Один пример такой поверхности Квантик и его друзья уже знают – однополостный гиперболоид вращения – его форму имеют секции башни Шухова[1].

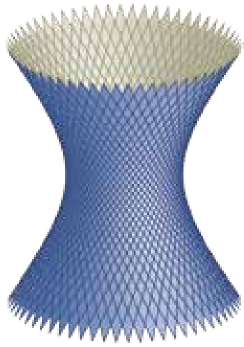


Шуховская башня
(фото А. Родченко, 1929)
kvan.tk/shukhov

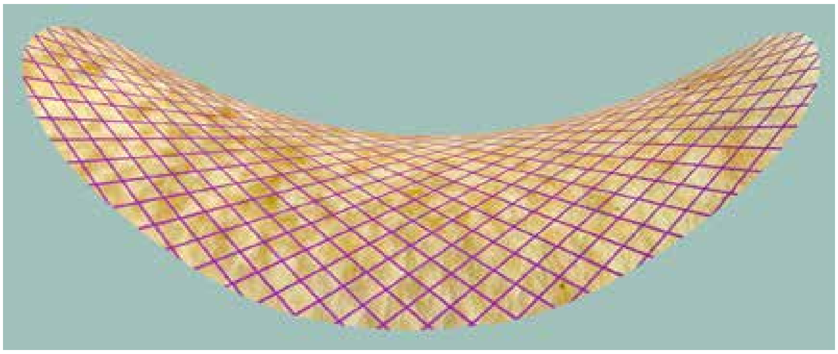
Чтобы сделать эту поверхность, возьмите две одинаковые крышки для банок, заполните их пластилином. По ободку одной из крышек воткните много одинаковых шпажек на одинаковом расстоянии друг от друга перпендикулярно плоскости крышки. Аккуратно накройте конструкцию второй

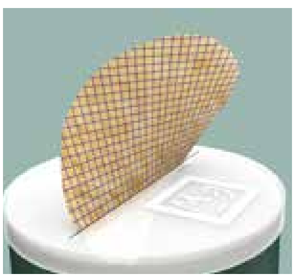
[1] См. статью «Шухов и его башня», «Квантик» № 8 за 2012 год.

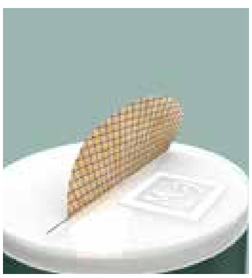
крышкой, чтобы шпажки воткнулись и в неё (по ободку, на таком же расстоянии друг от друга). Получился цилиндр. Теперь слегка поверните одну крышку, держа другую неподвижной: получится гиперболоид! Он симметричный: в зеркале получится такая же поверхность, но шпажки будут закручены в другую сторону. Поэтому настоящие и зеркальные шпажки образуют сетку. Поверхностей, на которых есть сетка из прямых (через каждую точку проходит более одной прямой), отличных от плоскости, всего две – обе их вы найдёте в этой статье.



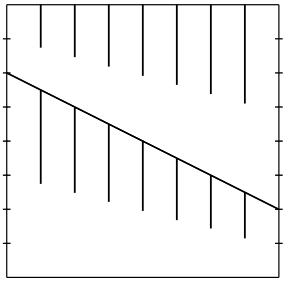
Ещё одна поверхность – *гиперболический параболоид*. Не пугайтесь названия: вы наверняка встречались с этой поверхностью, если видели чипсы. Она похожа на седло: именно такую форму имеют чипсы, упакованные в тубусы.



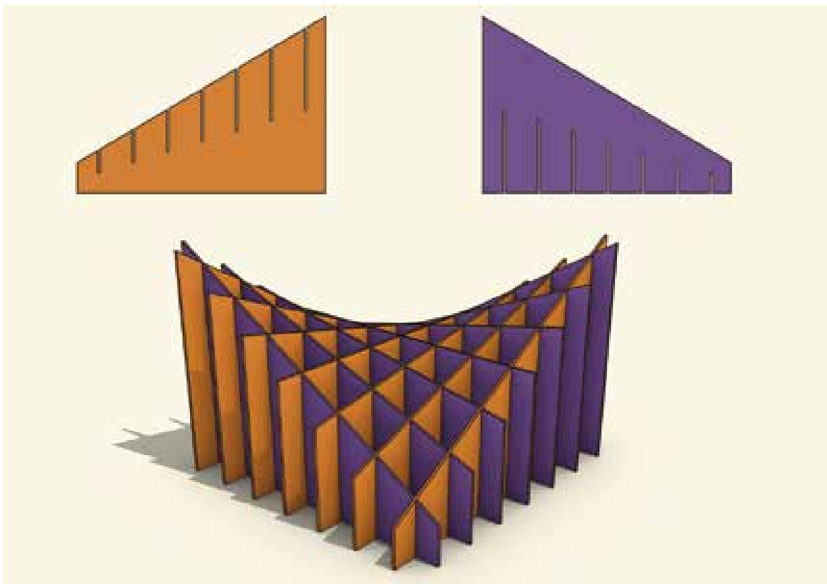




Оказывается, что эта поверхность линейчатая. Убедитесь в этом, проделав такой эксперимент: прорежьте узкую щель в крышке от тубуса и аккуратно просуньте чипс через эту щель. Чипс пролезет!



Желающие могут изготовить модель гиперболического параболоида из картона. Предлагаем способ, в котором понадобится 7 одинаковых квадратов. Боковые стороны разделим метками на 8 равных частей. Разрежем квадрат по отрезку, соединяющему метку с противоположной, так сделаем по одному разу с каждой меткой. Получим 7 одинаковых пар деталей. Сделаем вертикальные прорези на половину высоты, отстоящие друг от друга и от вертикальных краёв на одно и то же расстояние. Соединим детали, как на картинке. Получилась поверхность сетки из прямых (см. похожие картинки в журнале «Квант» № 3 за 1990 год, на 1-й и 4-й страницах обложки).



Ту же самую поверхность можно получить по-другому. Возьмём две прямые, отметим на каждой прямой одинаковое количество точек на равных расстояниях, пронумеруем их по порядку. Соединим отрезком каждую точку с точкой на другой прямой с тем же номером. Отрезки заметут поверхность. Если

прямые были параллельны или пересекались, то получится плоскость. А если нет, то гиперболический параболоид.

Попробуйте приложить листочек бумаги поверх изготовленной модели, и вы увидите, что это невозможно без складок и разрезов. То есть эта поверхность «неплоская». Однополостный гиперболоид – тоже. Покажем это. Представим, что удалось приложить листок к поверхности. Обведём карандашом четырёхугольник со сторонами вдоль прямых на поверхности. На листе получится четырёхугольник с теми же углами, что и на поверхности. Однако сумма углов четырёхугольника на плоскости[2] всегда равна 360°, а наш четырёхугольник на поверхности пространственный – он не лежит целиком ни в какой плоскости, потому что его противоположные стороны и не пересекаются, и не параллельны, при этом сумма углов пространственного четырёхугольника всегда меньше 360°. Попробуйте это доказать, разрезав четырёхугольник на два треугольника и сравнив сумму их углов с суммой углов четырёхугольника.

Что бывают «неплоские» поверхности, вы наверняка уже знаете, если пробовали обернуть мячик листочком бумаги. А вот что не всякая линейчатая поверхность – плоская, надеемся, кого-то удивило.

Проект «Математические этюды» **etudes.ru**, по материалам которого подготовлена эта статья, высылает свою иллюстрированную книгу «Математическая составляющая» тем, кто сделает какую-либо модель и подарит её школьному кабинету математики (см. kvan.tk/etudes-vk). Если вы сделаете модель гиперболического параболоида или однополостного гиперболоида не только для себя, но и для учителя, пишите по адресу **gift@etudes.ru** и получите книгу!

[2] См. статью «Чему равна сумма углов?» Льва Емельянова в «Квантике» №3 за 2020 год.

Художник Мария Усеинова