XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

Материал подготовили
Александр Блинков, Александр Грибалко,
Алексей Заславский, Инесса Раскина,
Сергей Токарев, Александр Хачатурян,
Игорь Эльман

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Приводим избранные задачи турнира 2021 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась.

1. (*О. Медведь*, 5) Барон Мюнхгаузен утверждает, что расставил цифры 0, 1 и 2 в клетках таблицы 7×7 так, что число 2021 можно прочесть (по горизонтали, вертикали или диагонали, причём в любом направлении) более чем 30 способами. Могут ли слова барона быть правдой?

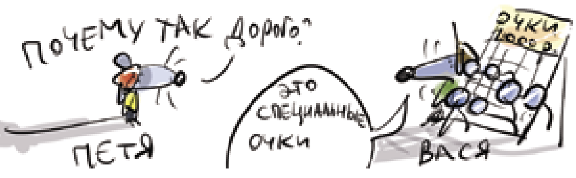
2. (*А. Шаповалов*, 6) В 20 пакетах лежит по 26 слив, масса слив в каждом пакете не больше 1 кг. Докажите, что можно переложить сливы в 26 пакетов по 20 слив так, чтобы масса слив в каждом пакете была меньше 1 кг.

3. (*А. Грибалко*, 5–6) В каждом раунде игры «Что? Где? Когда?» разыгрывается 1 очко, которое достаётся либо знатокам, либо телезрителям. Игра идёт до 6 очков. Олег захотел посмотреть игру в записи, но случайно увидел в комментариях финальный счёт. Всё же он не успел прочитать, кто победил, поэтому начал просмотр. По окончании восьмого раунда Олег сказал: «До этого было интересно смотреть: я не знал, чем закончится каждый раунд, а вот дальше я знаю исходы всех оставшихся раундов». С каким счётом завершилась игра?

4. (*С. Токарев*, 6–7) Буквами В, Д, Е, И, Р, С, Т, Ь, Я зашифрованы разные цифры так, что число, зашифрованное словом ТРИДЕВЯТЬ, делится на 27, а число, зашифрованное словом ТРИДЕСЯТЬ, делится на 30. Какую цифру обозначает буква С, если буква В обозначает тройку?

5. (*А. Шаповалов*, 5–6) Имеется 100 карточек с номерами 1, 2, ..., 100. Номера напечатаны так, что для Пети они невидимы, а для Васи видимы сквозь специальные очки. За одну попытку Петя разбивает карточки на пары, а Вася указывает все пары с нечётной суммой номеров. За какое наименьшее число попыток Петя сможет наверняка разложить все карточки на пары с нечётной суммой?

6. (*А. Грибалко*, 5–7) На острове живут 100 аборигенов разного возраста. Каждый из них всегда го-



ворит правду или всегда лжёт. Однажды все жители острова встали в круг, и каждый сказал, что оба его соседа старше него. Ночью нескольких аборигенов съели, а на следующий день оставшиеся снова встали в круг, и каждый заявил, что оба его соседа младше него. Какое наименьшее число аборигенов могло быть съедено?

7. (*А. Грибалко*, 5) У Коли есть шесть карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он разложил их на столе в ряд числами вниз. Саша может указать любые два набора карточек и спросить у Коли, равны ли произведения чисел на карточках в этих наборах. Как ему за два вопроса узнать, лежат ли карточки в порядке возрастания написанных на них чисел?

8. (*М. Волчкевич*, 7–8) Федя согнул листок бумаги по прямой линии, затем полученную фигуру согнул по другой прямой ещё один раз, а потом проткнул её иголкой. Когда он развернул листок обратно, у него получилось четыре дырки. Докажите, что через все эти дырки Федя может провести либо одну прямую, либо одну окружность.

9. (*А. Шаповалов*, 6–8) В клетки таблицы 6×8 нужно вписать числа 1, 2, ..., 48. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно семь простых чисел, или тех, где простых чисел на краю ровно восемь?

10. (*А. Шаповалов*, 6–8) Суду предъявлено 100 одинаковых с виду монет, среди которых есть фальшивые. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Он отвечает на вопросы суда и доказывает свои ответы, проводя взвешивания на чашечных весах без гирь. Однако адвокат связан обязательством не разглашать ни про какую монету, фальшивая она или настоящая: он не имеет права делать взвешивания, из которых такую информацию можно логически вывести.

XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

а) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 22, 66 или 88. Как адвокату доказать, что их 66, не нарушая обязательств?

б) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 20 или 80. Как адвокату доказать, что их 20, не нарушая обязательств?

11. (*М. Евдокимов*, 5–8) На каждой грани куба красными чернилами провели одну или обе диагонали. Оказалось, что при этом не образовалось ни одного треугольника с красными сторонами. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено?

12. (*Д. Шноль*, 5–8) Петя написал на доске 100 раз в строку номер своей квартиры через пробел. Маша должна поставить между каждыми двумя числами знаки арифметических действий, а там, где захочет, – скобки. Она утверждает, ещё не зная номера Петиной квартиры, что сможет получить в ответе любое натуральное число от 1 до 2021. Права ли она?

13. (*А. Пешнин*, 7–8) В прямоугольнике $ABCD$, отличном от квадрата, на биссектрису угла A опущен перпендикуляр CH. Докажите, что BH больше четверти периметра прямоугольника.

14. (*А. Доледенок*, 7–8) Точки P и Q лежат на диагонали AC квадрата $ABCD$. Точки X и Y на сторонах CD и AD соответственно таковы, что $\angle BPX = \angle BQY = 90°$. Точка Z – середина отрезка XY. Найдите угол PZQ.

15. (*А. Грибалко*, 7–8) У Знайки есть бумажный равносторонний треугольник, а у Незнайки – квадрат, причём длины сторон их фигур равны. Знайка вырезает из своей фигуры одинаковые равносторонние треугольники, а Незнайка из своей – квадраты с такой же стороной (оба делают разрезы параллельно сторонам своей фигуры). Незнайка утверждает, что всегда сможет вырезать столько же квадратов, сколько Знайка вырежет треугольников. Прав ли он?