НАШ КОНКУРС, XI тур
(«Квантик» № 7, 2021)

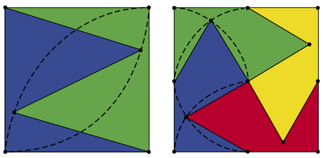
51. *Можно ли неверное равенство* $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 1000$ *сделать верным, а) удалив некоторые из* 100 *его слагаемых; б) заменив некоторые из* 99 *плюсов на минусы?*

Ответы: а) да; б) да. В пункте а) можно удалить 35 и все числа с 46 до 100 (складываем подряд 1, 2, 3, ... пока не получим число, большее 1000, и удаляем число, равное «избытку»). В пункте б) можно заменить плюсы на минусы перед 56 и всеми числами от 79 до 100.

52. *В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. При этом, каких бы двух мальчиков мы ни взяли, у них будет разное количество подруг. Докажите, что всегда удастся разбить класс на дружащие пары «мальчик-девочка».*

Расположим мальчиков по возрастанию числа подруг. Тогда у первого – хотя бы одна подруга, у второго – хотя бы две, и так далее. Будем выбирать мальчикам пары в том же порядке. Для каждого мальчика число его подруг будет больше, чем число занятых девочек. Значит, для каждого найдётся свободная подруга.

53. *Можно ли квадрат разрезать на несколько равносторонних а) пятиугольников; б) шестиугольников? (Многоугольник называется равносторонним, если все его стороны равны. Его углы не обязательно равны, и он даже может быть невыпуклым.)*

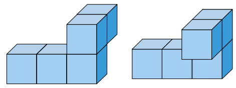


Ответ: а) да; б) да (см. рисунки справа).

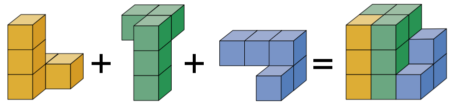
54. *Квантик выписал десятизначное натуральное число, содержащее все цифры от* 0 *до* 9*, в котором любые две соседние цифры различаются хотя бы на* 5*. а) Какие у этого числа могут быть первая и последняя цифры? Приведите все варианты и докажите, что других нет. б) Приведите пример такого числа.*

Ответ: а) 4 и 5, либо наоборот; б) 5061728394. Рядом с цифрой 4 может стоять только 9, а с цифрой 5 – только 0. Но у каждой цифры, кроме крайних, есть две соседних. Значит, цифры 4 и 5 – крайние. Поставив их на концы числа, остальные цифры восстанавливаем однозначно.

55. *Назовём «змейкой» фигуру, склеенную из пяти одинаковых кубиков так, как показано на рисунке (змейка может «смотреть» направо или налево). Можно ли из некоторого количества таких змеек сложить куб без дырок?*



Ответ: можно. Из трёх копий составляем половинку параллелепипеда 5×3×2 (см. рисунок).



Из двух половинок складываем параллелепипед, а из нескольких параллелепипедов – куб.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК. Избранные задачи 2020 года («Квантик» № 8, 2021)

1. Поскольку в условии речь идёт о значении некоторого глагола, попробуем подобрать глаголы, однокоренные предложенным существительным: *перец – перчить, наперчить, поперчить*; *мука* – нет глаголов (существует глагол *мучить*, но он является однокоренным не слову *му́ка*, а его омографу *му́ка*); *горох – огорошить*; *сахар – сахарить, насахарить, подсахарить, пересахарить, засахариться*; *соль – солить, засолить, посолить, насолить, подсолить, пересолить*. Только один из этих глаголов имеет значение «причинить неприятность, навредить, досадить», то есть значение, близкое к «навести порчу», – это глагол *насолить*.

Академик В. В. Виноградов по этому поводу писал: «Вероятнее всего это переносное значение глагола *насолить* возникло на основе некогда существовавших представлений о колдовстве. По суеверным представлениям прошлого, болезнь и порчу могло вызывать разбрасывание с наговором различных предметов. Лица, переходящие через заколдованные предметы или прикасавшиеся к ним, подвергались „порче"; с целью нанести вред и употреблялась часто „наговорная" соль». Таким образом, **ответ: (Д).**

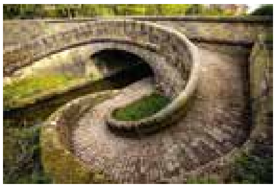
2. Если поменять букву *я* на букву *к*, получится *Мы отсекли всё ненужное*, и смысл фразы останется почти тем же. **Ответ: (В).**

3. Выступая с совместными статьями, Николай Фёдорович Анненский (родной брат знаменитого поэта Иннокентия Анненского) и Владимир Галактионович Короленко использовали коллективный псевдоним «О. Б. А.» (т. е. *оба*), самим своим звучанием сообщавший читателям, что авторов двое. **Ответ:** (Б).

4. Из условия задачи видно, что *ahage* означает 2, а *tokale* – 1. Чтобы образовать числительное, набирается наибольшее возможное число двоек, а затем прибавляется единица, если число нечётное. Таким образом, $7 = 2 + 2 + 2 + 1$ = ahage ahage ahage tokale. **Ответ:** (Г).

ХИТРЫЙ МОСТ («Квантик» № 8, 2021)

Подобные мосты строили на пути буксировки барж. Если лошади, буксирующей баржу, надо перейти по обычному мосту, её нужно отвязывать от баржи, а после перехода по мосту привязывать снова. А с мостом на картинке это не требуется. Вот фотография одного из таких мостов.



ТЕНЬ РАСЧЁСКИ

Один край тени заметно дальше от расчёски, чем другой, а чем дальше тень от объекта, тем она более размытая (потому что Солнце — не точка и светит не строго в одном направлении). Поэтому к середине тени зубцов сливаются в единое полотно. А ещё дальше тени соседних зубцов начинают налезать друг на друга. В результате в промежутках между зубцами тень оказывается гуще, чем за самими зубцами, и мы снова видим чёткие полосы.

КРЫЛОВ, ВИТТЕ, ЦИЦЕРОН

Выдумана история о Цицероне. Почтовый голубь не летает обратно, тем более на плывущий корабль – он из любого места возвращается туда, где его вырастили (в нашем случае это вилла Цицерона). На самом деле никакого голубя не было. Цицерон, объявленный вне закона, уже плыл на корабле, но никак не мог решить, куда направиться. Он высадился отдохнуть в одном из своих имений, потом снова отправился на корабль, а в это время в дом вломились убийцы. Все в доме твердили, что не знают, где Цицерон, но всё же нашёлся один предатель, и Цицерона настигли по пути к морю.

Фраза «исключение подтверждает правило» – искажение фразы «exceptio firmat regulam in casibus non exceptis», «исключение подтверждает правило в неисключённых случаях». Смысл её такой: раз имеются исключения, то имеется и правило, из которого они сделаны, и правило выполнено всегда, кроме исключений. Это положение применялось в средневековом праве. Сама мысль встречается в речи Цицерона на судебном процессе в защиту Луция Корнелия Бальба, обвинявшегося в незаконном получении прав римского гражданина (по рождению тот был гадитанцем). Одним из аргументов Цицерона был такой. У римлян существуют договоры с некоторыми народами, в которых сделана оговорка, что приём лиц из этих народов в число римских граждан исключён. Поскольку в договоре с гадитанцами такой оговорки нет, это безусловно разрешено.

XXVI ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ им. А. П. САВИНА

Избранные задачи

1. Ответ: могут. На рисунке показан пример расстановки цифр, в котором число 2021 можно прочесть 34 способами.

2	1	2	0	2	1	2
0	1	2	0	2	1	0
2	1	2	0	2	1	2
1	1	2	0	2	1	1
2	1	2	0	2	1	2
0	1	2	0	2	1	0
2	1	2	0	2	1	2

2. Выберем из каждого пакета самую лёгкую сливу и сложим их в 21-й пакет. Так как масса каждой выбранной сливы не превышает $\frac{1}{26}$ кг, их общая масса не больше $\frac{20}{26} < 1$ кг. При этом масса каждого исходного пакета стала меньше 1 кг, и в них осталось по 25 слив. Повторим операцию: переложим самую лёгкую сливу из каждого исходного пакета в 22-й пакет, общая масса слив там будет меньше $\frac{20}{25}$ кг. Продолжая такую операцию, доведём число пакетов до 26.

3. Ответ: $6:4$. Так как игра идёт до 6 очков и ещё не завершилась, возможны два исхода восьмого раунда: счёт $4:4$ или $5:3$. Из первого узнать исход следующего раунда нельзя, остаётся вариант $5:3$. Тогда возможны три финальных счёта: $6:3$, $6:4$ или $6:5$.

Перед счётом $5:3$ счёт был либо $5:2$, либо $4:3$. Если бы игра завершилась со счётом $6:3$, в каждом из этих двух случаев можно было бы однозначно определить исходы оставшихся раундов, и Олег знал бы их раньше восьмого раунда.

Если бы игра завершилась со счётом $6:5$, то перед последним раундом был бы счёт $5:5$, из которого не ясно, кто победит.

А вот знание финального счёта $6:4$ позволяет при счёте $5:3$ определить исходы последних двух раундов. При этом если после седьмого раунда был счёт $4:3$, ситуация была неопределённой: дальше могло быть как $4:4$, так и $5:3$.

4. Ответ: 6. Так как каждая из сумм $Т+Р+И+Д+Е+В+Я+Т+Ь$ и $Т+Р+И+Д+Е+С+Я+Т+Ь$ кратна 3, то этим же свойством обладает и их разность, равная $В-С$. Значит, искомая цифра – это 0, 6 или 9. Но нуль, как легко видеть, зашифрован мягким знаком. Покажем, что буквой С зашифрована не девятка. Обозначив через Х не зашифрованную ещё цифру, воспользуемся тем, что сумма $Т+Р+И+Д+Е+В+Я+Т+Ь=45+Т-С-Х$ делится на 9. Равенство С = 9 означало бы, что Т − Х кратно 9, что невозможно. Остаётся лишь один вариант: С = 6.

5. Ответ: за три попытки.

Оценка. При первой попытке может оказаться, что во всех парах суммы чётны. Тогда Петя будет знать только, что в каждой паре номера одной чётности. Объединяя при второй попытке карточки из разных пар, он не сможет гарантировать, что номера у них будут разной чётности.

Пример. Петя выкладывает карточки по кругу и мысленно отмечает половину из них через одну. Для первой проверки он объединяет в пару каждую отмеченную карточку с соседней справа, а для второй – с соседней слева. Так про каждую пару соседних карточек Петя узнает, одной чётности их номера или нет. Тогда он будет знать это и про каждую пару карточек. Так как карточек с нечётными и чётными номерами поровну, при третьей попытке Петя сможет разбить их на пары с номерами разной чётности.

6. Ответ: 3 аборигена.

Оценка. Два самых старых аборигена – лжецы, ведь никто из них не младше обоих своих соседей. Значит, во второй день самый старый абориген не мог сказать, что оба его соседа младше него, поэтому его съели. По аналогичным соображениям съели и второго по старшинству.

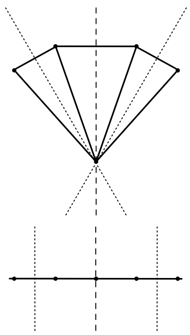
А вот самый молодой абориген младше обоих своих соседей, поэтому он всегда говорит правду. Во второй раз он снова сказал бы про своих соседей, что они старше него. Значит, и его съели. Итого съели не менее трёх аборигенов.

Пример. Пронумеруем аборигенов числами от 1 до 100 в порядке увеличения возрастов. Расставим их в таком же порядке по кругу, поменяв местами аборигенов 98 и 99. Если аборигены 1 и 98 всегда говорят правду, а все остальные – лжецы, то каждый может сказать, что оба его соседа старше него. Далее съедают аборигенов 1, 99 и 100, после чего оставшиеся встают в том же порядке, как и раньше. Тогда каждый может сказать, что оба его соседа младше него.

7. Будем далее использовать номера карточек, а не числа на них (которые Саша пока не знает). Если хоть одно из сравнений даст неравенство, Саша сразу определит, что карточки лежат не по возрастанию написанных на них чисел.

Сначала Саша сравнит наборы (1, 2, 3) и (6). Минимальное произведение трёх написанных на карточках чисел равно 6, поэтому в случае равенства Саша поймёт, что на карточках первого набора написаны числа 1, 2, 3, во втором наборе – карточка с числом 6, а на отложенных карточках – числа 4 и 5. Обозначим наборы, в которых пока не определено, в каком порядке лежат карточки: $A_1 = (1, 2, 3)$, $A_2 = (4, 5)$.

Далее Саша сравнит наборы (2, 6) и (3, 4). Равенство произведений возможно только в случае, если во второй набор из A_1 попало число 3, иначе не будет обеспечена делимость на 3. Значит, в проверке также участвуют по одному числу из A_1 и A_2, причём первое в 2 раза меньше второго, то есть это могут быть только числа 2 и 4. Тогда карточки с числами 1 и 5 из наборов A_1 и A_2 в проверке не участвовали. Так Саша однозначно определит числа на всех карточках и убедится, что они лежат по возрастанию.



8. Сгибание листа совмещает точки, симметричные относительно линии сгиба. Поэтому и сгибы, и проколы, сделанные на согнутом листе, появятся парами симметричных друг другу. На развёрнутом листке будут две линии второго сгиба, симметричные относительно линии первого сгиба. Проколов будет две пары, и в каждой паре проколы симметричны относительно «своей» линии второго сгиба. А ещё сами пары симметричны друг другу относительно линии первого сгиба.

Если сгибы не параллельны, все проколы равноудалены от точки пересечения сгибов, то есть лежат на окружности с центром в этой точке. Если сгибы параллельны, все проколы лежат на прямой, перпендикулярной линиям сгибов.

9. Ответ: поровну. Заметим, что в таблице 24 крайние клетки и столько же не крайних. Кроме того, среди чисел от 1 до 48 ровно 15 простых: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Раскрасим крайние клетки в 24 цвета (каждую клетку – в свой цвет) и так же поступим с внутренними клетками, используя тот же набор цветов. Пусть имеется расстановка чисел в таблице с семью простыми числами на краю. Поменяем местами все числа в парах одноцветных клеток. Все семь простых чисел с края уйдут внутрь, а на край из внутренних клеток попадут оставшиеся восемь простых чисел, и мы получим расстановку с восемью простыми числами на краю. Таким же образом из способа с восемью простыми числами на краю получается способ с семью простыми на краю. Значит, можно разбить указанные способы расстановки чисел на пары, поэтому их одинаковое количество.

10. а) Адвокат может разбить монеты на 25 четвёрок, в 20 из них поместить по три фальшивые монеты, в одну – две фальшивые, а в оставшиеся четыре – по одной. Для каждой четвёрки он сравнит две пары монет так, чтобы они оказались неравными. Неравновесие покажет, что в каждой четвёрке есть хоть одна настоящая монета и хотя бы одна фальшивая. Так как фальшивых монет не менее 25, то вариант «22 фальшивых» не подходит. Так как настоящих монет не менее 25, то и вариант «88 фальшивых» не подходит.

Докажем, что условие неразглашения выполнено. В лёгкой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четвёрке ровно одна фальшивая монета. В тяжёлой паре любая из монет может быть настоящей или фальшивой в случае, когда в четвёрке ровно одна настоящая монета.

б) Адвокат может выделить 22 группы по четыре монеты и сравнить одну из них со всеми остальными. Если эта группа окажется легче остальных, то суд будет знать, что в каждой более тяжёлой группе есть хотя бы одна настоящая монета. Следовательно, настоящих монет не менее 21, поэтому вариант «80 фальшивых» не подходит. При этом в более лёгкой группе может быть три фальшивых монеты, а в остальных – по одной или ни одной, но суд не будет знать, в каких именно группах фальшивых монет нет, а значит, не получит запрещённой информации.

11. Ответ: 8 диагоналей.

Оценка. Грани куба имеют 12 диагоналей. Если раскрасить вершины куба в шахматном порядке, то 6 диагоналей будут соединять белые вершины и 6 – чёрные. «Белые» диагонали образуют 4 треугольника, и чтобы их разрушить, нужно оставить не более четырёх таких диагоналей. То же верно и для «чёрных» диагоналей. Значит, провели не более восьми диагоналей.

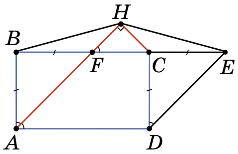
Пример. На нижней и верхней гранях проведём обе диагонали, а на боковых – по одной так, чтобы у них не было общих точек.

12. Ответ: права. Обозначим номер квартиры Пети через N. Любое число x от 1 до 9 можно получить, используя не более $x+1$ чисел N: $x=(N+N+...+N):N$. Число 10 можно получить, используя девять чисел N:

$$10=((N+N):N)\cdot((N+N+N+N+N):N).$$

Представим любое число от 1 до 2021 как $\overline{abcd}=10\cdot10\cdot10\cdot a+10\cdot10\cdot b+10\cdot c+d$. Цифра a не больше 2, остальные цифры любые. Значит, опираясь на разложение, такое число можно получить, используя не более $9\cdot6+3+10\cdot3=87$ чисел N. «Лишние» числа N превращаем в 0 так: $(N-N)\cdot(N+\ldots+N)$.

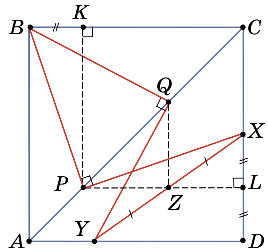
13. Пусть биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке F. Проведём через вершину D прямую, параллельную этой биссектрисе, которая пересечёт прямую BC в точке E (см. рисунок). Поскольку $\angle CDE=\angle BAF=45°$, то $CE=CD=BA=BF$, поэтому длина отрезка BE равна полупериметру прямоугольника.



Так как $\angle CFH=45°$, то $FH=CH$ и $\angle BFH= =\angle ECH$. Тогда треугольники BFH и ECH равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $BH=EH$. По неравенству треугольника $BH+ +EH>BE$, то есть $BH>\frac{1}{2}BE$, что и требовалось.

Замечание. Если $AB>BC$, то точка H лежит в другой полуплоскости относительно прямой BC, но рассуждения аналогичны.

14. Ответ: 90°. Опустим из точки P перпендикуляры PK и PL на стороны BC и CD соответственно. Так как $PKCL$ – квадрат, то $PK=PL$. Также $\angle BPK = 90° - \angle KPX = =\angle XPL$, поэтому прямоугольные треугольники PKB и PLX равны по катету и острому углу. Значит, $LX=KB=BC-KC=CD-CL=LD$. Поскольку прямая PL параллельна AD, она содержит среднюю линию треугольника XDY, то есть проходит через точку Z. Аналогично, прямая QZ параллельна CD, откуда $\angle PZQ=90°$.



15. Ответ: не прав. Из равностороннего треугольника со стороной 7 можно вырезать десять равносторонних треугольников со стороной 2 (см. рисунок). А из квадрата со стороной 7 нельзя вырезать более девяти квадратов со стороной 2. Действительно, при любом расположении квадрата со стороной 2 площадь его пересечения с закрашенной на рисунке областью равна 1, а площадь всей закрашенной области равна 9.