Татьяна Сабурова

ТРИ ЛЕММЫ О ПЛОЩАДЯХ

Слышали вы что-нибудь о «рельсах Евклида», о перекашивании треугольников, знакомы ли с особенностями укладки линолеума? Предлагаю совершить небольшое путешествие, прокатиться по рельсам, понаблюдать за треугольниками и познакомиться с тремя несложными леммами о площадях.

Представим, что точки A и B закреплены на прямой l, а точка C свободно движется по прямой m (рис. 1). Две параллельные прямые l и m будем называть «рельсами Евклида».

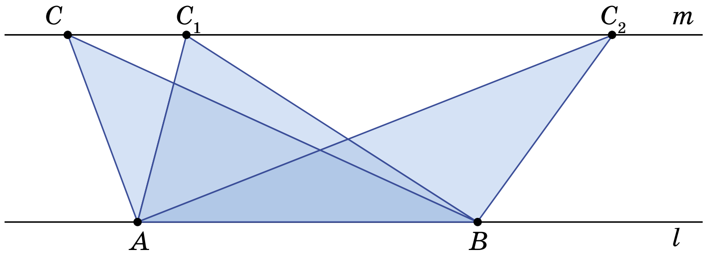

Рис. 1

Все треугольники ABC, ABC_1, ABC_2 равновелики (имеют одинаковые площади), ведь они получаются друг из друга с помощью перекашивания. Представьте, что треугольник сложили из тонких горизонтальных дощечек. При перекашивании дощечки просто сдвигаются друг относительно друга, поэтому площадь не меняется.[1]

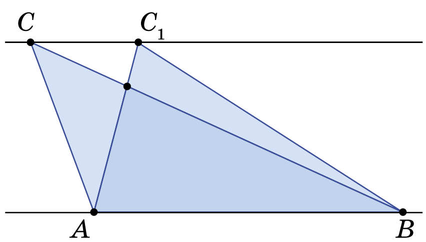

Рис. 2

Посмотрим на равновеликие треугольники ABC и ABC_1 (рис. 2). Пусть O – точка пересечения AC_1 и BC. Уберём общую часть – треугольник AOB, тогда оставшиеся треугольники AOC и BOC_1 тоже равновелики (рис. 3). Получилась красивая

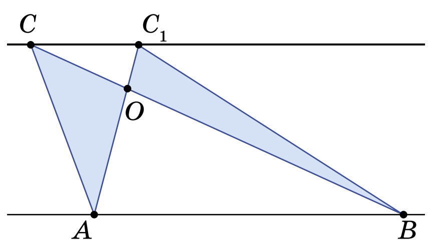

Рис. 3

Лемма 1 («о крыльях бабочки»). *Пусть две диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольни-*

---

[1] Подробнее об этом читайте в статье Г. Мерзона «Площади и перекашивания» в «Квантике» № 2 за 2020 год.

ка. Площади двух из них, примыкающих к боковым сторонам, равны.

Теперь закрепим точку C на прямой m и позволим отрезку AB скользить по прямой l (то есть длина отрезка AB не меняется, рис. 4). Все полученные треугольники ABC, A_1B_1C, A_2B_2C равновелики (ведь это те же треугольники, что на рисунке 1, только сдвинутые).

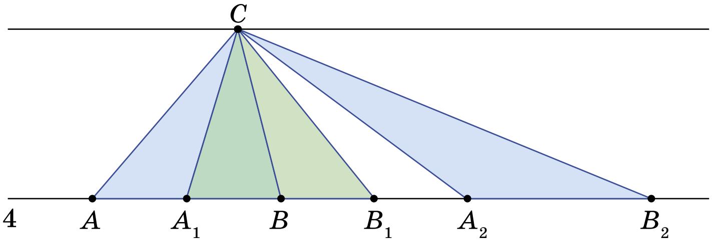

Рис. 4

Рассмотрим один интересный случай. Передвинем отрезок AB так, что A_1 совпадёт с точкой B (рис. 5). Заметим, что CB – медиана треугольника AB_1C. Получилось полезное утверждение:

Лемма 2. *Медиана делит треугольник на два равновеликих.*

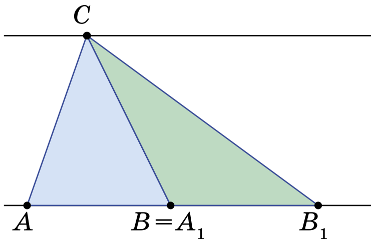

Рис. 5

Оказывается, с помощью этих двух лемм можно решить много интересных задач.

Легко разделить треугольник одной прямой на две равновеликие части, если прямая проходит через вершину треугольника или середину стороны. А если нет?

Задача 1. Возьмём точку K на стороне треугольника AB, отличную от её середины M (рис. 6). Проведите прямую KN, делящую треугольник на две равновеликие части.

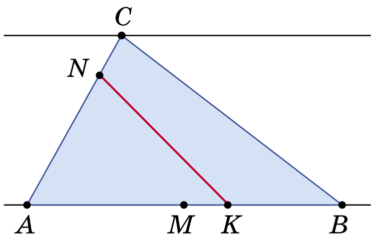

Рис. 6

Решение. Предположим, нам удалось провести такую прямую, тогда площадь треугольника ANK равна половине площади треугольника ABC.

Проведём медиану CM, она тоже поделит треугольник на две равновеликие части (рис. 7).

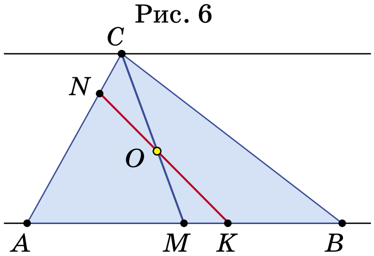

Рис. 7

Площади треугольников ANK и ACM равны. У этих фигур есть общая часть – четырёхугольник $ANOM$, поэтому треугольники CON и MOK равновелики.

Присмотритесь: они напоминают «крылья бабочки» (рис. 8). Значит, мы добьёмся требуемого, если сделаем отрезки CK и MN параллельными (рис. 9)!

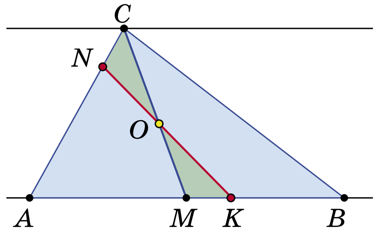

Рис. 8

Для построения искомой прямой сначала построим отрезок CK, затем через точку M проведём прямую, параллельную CK, она пересечёт AC в некоторой точке N. Соединив точки N и K, получим искомую прямую (рис. 10).

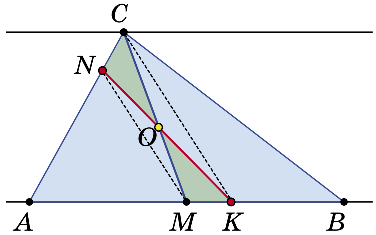

Рис. 9

Задача 2. Дан произвольный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Проведите через одну из вершин прямую, делящую его на две равновеликие части.

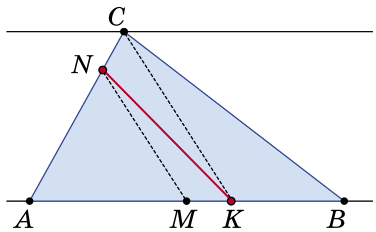

Рис. 10

Решение. Отметим середину M диагонали BD. По лемме 2, ломаная AMC делит четырёхугольник $ABCD$ на две равновеликие части (рис. 11). Проведём через точку M прямую, параллельную AC, пусть она пересекает сторону AD в точке K. Тогда прямая CK – искомая, поскольку

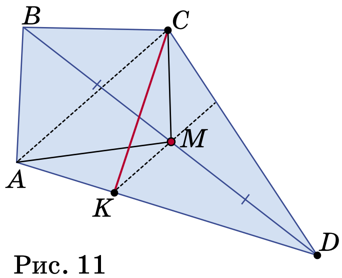

Рис. 11

$$\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABCM} = S_{ABC} + S_{AMC} = S_{ABC} + S_{ACK} = S_{ABCK}.$$

Упражнение. Попробуйте разделить на три равновеликие части: а) параллелограмм; б) произвольный четырёхугольник.[2]

[2] Много других интересных задач можно прочитать в брошюре Б. П. Гейдмана «Площади многоугольников» (М.: МЦНМО, 2019).

Задача 3. На стороне треугольника во внешнюю сторону построен полукруг (рис. 12). Одним прямолинейным разрезом разделите эту фигуру на две равновеликие части.

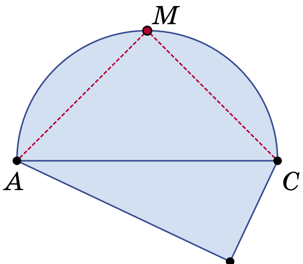

Рис. 12

Решение. Рассмотрим точку M – середину полуокружности, соединим её с концами диаметра A и C. Получившиеся сегменты равны. Осталось через вершину M провести прямую, делящую четырёхугольник $AMCB$ на две равновеликие части.

Задача 4. В комнате прямоугольной формы размером 4×6 решили заменить линолеум (рис. 13), но строители случайно сдвинули два куска (как на рисунке 14 или 15). Что больше: площадь части пола, покрытой дважды, или не покрытой ни разу?

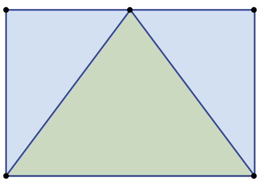
Рис. 13

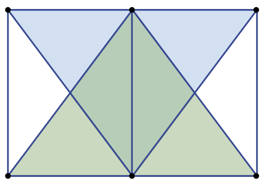
Рис. 14

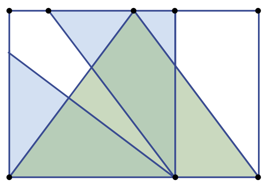
Рис. 15

Решение. Площадь комнаты равна сумме площадей двух синих и одного зелёного треугольников на рисунке 13. С другой стороны, когда синие треугольники сдвинули, покрытая часть пола уменьшилась на величину площади пола, покрытого дважды. Значит, площадь части пола, покрытой дважды, равна площади части, не покрытой ни разу.

Фактически так же доказывается

Лемма 3 («о линолеуме»). *Несколько кусков линолеума лежат на полу комнаты. При этом каждая точка пола покрыта линолеумом не более чем в два слоя. Площадь пола, покрытая дважды, равна площади, не покрытой ни разу, тогда и только тогда, когда общая площадь линолеума равна площади комнаты.*

Задача 5. Точка A_1 – середина стороны BC треугольника ABC, а точки B_1, B_2 и B_3 делят сторону AC на четыре равных отрезка. Докажите, что площадь синей области равна площади зелёной.

Решение. Заметим (рис. 16), что AA_1 – медиана ΔABC, откуда $S_{ACA_1} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Кроме того, BB_2 – медиана ΔABC, а BB_1 и BB_3 – медианы ΔABB_2 и ΔB_2BC соответственно, откуда $S_{ABB_1} = S_{B_2BB_3} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

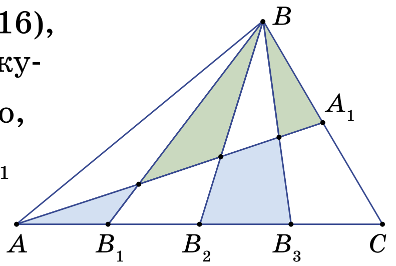

Рис. 16

Тогда суммарная площадь «кусков линолеума» ABB_1, B_2BB_3 и ACA_1, лежащих в треугольнике ABC, равна его площади. При этом синие части покрыты дважды, а зелёные не покрыты ни разу. По лемме о линолеуме площади синей и зелёной областей равны[3].

Когда-то в журнале «Юный техник» была рубрика «По ту сторону фокуса», где раскрывались секреты их создания. Давайте попробуем заглянуть в процесс создания задачи.

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 17). Проведём в нём главные диагонали, точку их пересечения обозначим через O. Сумма площадей шести правильных треугольников, на которые диагонали разбивают шестиугольник, равна его площади. Каждая главная диагональ параллельна паре противоположных сторон.

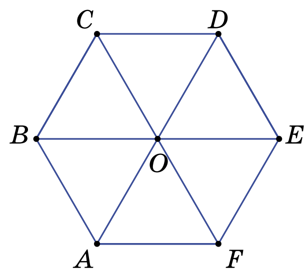

Рис. 17

Перекосим каждый из шести треугольников так, как показано на рисунке 18. Получим фигуру (рис. 19), похожую на объектив фотоаппарата (рис. 20).

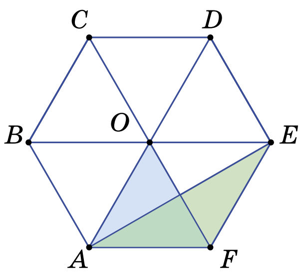

Рис. 18

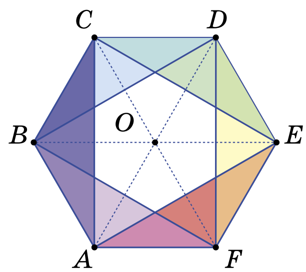

Рис. 19


Рис. 20

Вопрос: «Что больше: площадь части шестиугольника, покрытой дважды или не покрытой ни разу?»

Художник Мария Усеинова

[3] См. также задачи кружка И. А. Егоровой по ссылке kvan.tk/linoleum