Математический кружок

Михаил Евдокимов

ПЯТОЕ КОЛЕСО

Лёва готовился к олимпиаде по математике. «Новые одинаковые покрышки автомобиля „Антилопа Гну", если их установить на переднюю ось, выходят из строя через 10 000 км, а если их установить на заднюю ось – через 15 000 км, – прочитал он. – Какое наибольшее расстояние может проехать машина на таких покрышках, прежде чем Адаму Козлевичу придётся покупать новые?»

– Кто такой Адам Козлевич? – спросил Лёва.

– Это известный математик, – пошутил папа, который окончил мехмат МГУ. – Не отвлекайся!

– Что-то я не понимаю, в чём задача? Ясно же, что больше 10 000 км не проедешь! – Лёва захлопнул книгу.

– А что если в какой-то момент поменять местами передние и задние покрышки? – подсказал папа.

– Точно! Всё ясно! В среднем получается 12 500 км на колесо, то есть машина проедет 12 500 км, – выпалил Лёва и потянулся за мороженым.

– Такая простая задача на олимпиаде!? – Папа сегодня был очень ироничен.

– Да, как-то подозрительно легко получилось, – задумался Лёва.

– Подскажу, как проверить. Представь, что у тебя много покрышек, и ты заменяешь их по мере необходимости. Можешь указать момент, когда придётся заменить сразу обе пары покрышек?

– Сейчас... – Лёва мысленно ехал на машине и считал покрышки. – Например, через 30 000 км: как раз сотрутся три пары спереди и две – сзади, всего 5.

– Отлично! А можно ли проехать более 30 000 км, имея 5 пар покрышек?

– Хм... Я же могу их переставлять... Стоп! Резины на передней оси всё равно ведь сотрётся столько, сколько на трёх парах покрышек. А на задней оси – сколько на двух. Да просто резины не хватит на большее расстояние, как покрышки ни переставляй!

– А какое расстояние удастся проехать тогда на двух парах покрышек?

– Я понял! Резины на пяти парах покрышек хватает максимум на 30 000 км. Значит, двух пар хватит максимум на 2/5 от 30 000, то есть на 12 000 км. Надо же, получилось меньше, чем 12 500.

– Да, но ты пока объяснил, что боль-

ше 12 000 км на двух покрышках не проедешь. А как проехать 12 000 км?

– Надо всю резину истратить… Выходит, покрышки должны стереться одновременно, – размышлял вслух Лёва.

– И когда менять их местами?

– На полпути? Первые 6 000 км проедем без смены, а потом поменяем.

– А почему всё получится?

Лёва почесал затылок и продолжил:

– На половине пути мы как раз половину всей резины сотрём. Правда, на передних покрышках резины на сколько-то больше половины сотрётся, зато на задних – меньше…

– Причём на столько же меньше, – подсказал папа.

– Точно, ведь в сумме стёрлась половина! Но тогда на передних покрышках осталось столько же полезной резины, сколько стёрлось на задних, и наоборот. Если теперь поменять их местами, машина проедет в точности ещё такое же расстояние! Ура, я решил задачу!

– А в общем виде сможешь решить – если передние покрышки стираются через a км, а задние – через b км?

Лёва задумался.

– А как тут расстояние подобрать? Хотя… можно же взять просто ab км! На это расстояние мы истратим b пар покрышек спереди и a – сзади, всего $a+b$, а тогда двух пар… – Лёва почеркал что-то на бумажке и выдал ответ: – … хватит на $2ab/(a+b)$ км.

– Это число называется *средним гармоническим* чисел a и b, – отметил папа.

– Среднее? Оно что, между a и b всегда? – спросил Лёва. – Ну да, это же расстояние, которое мы проедем! Если, скажем, $a > b$, то b км мы проедем даже не меняя покрышки местами, а на a км просто резины не хватит.

– А ещё для различных положительных a и b оно меньше их среднего арифметического, как в нашем случае!

Лёва был озадачен, а папа продолжал.

– Потом докажешь. А у меня задача-продолжение: что если есть ещё одна запасная покрышка? Ведь так часто бывает. Как изменится ответ? Как нужно менять покрышки и что может помешать достичь максимума на практике?

– Да-а, – вздохнул Лёва, – не видать мне сегодня мороженого…

Помогите Лёве ответить на вопросы.

Художник Алексей Вайнер