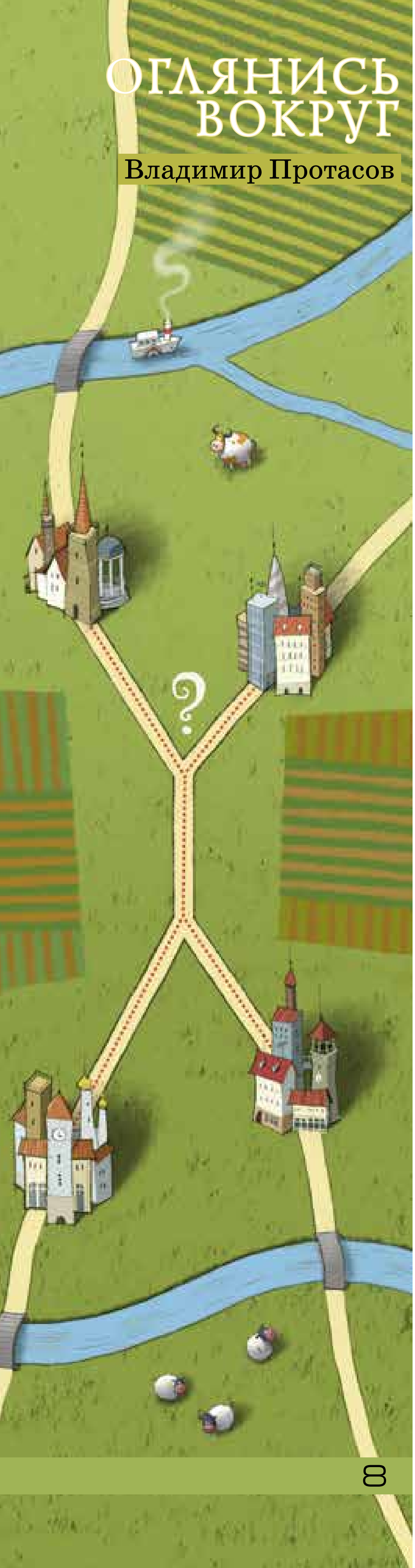
Владимир Протасов



ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Это случилось много лет назад. Я вёл математический кружок для школьников и дал такую задачу:

Задача 1. Четыре города расположены в вершинах квадрата со стороной 100 км. Жители хотят соединить их дорогами так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. Они собрали деньги на 280 км дороги. Хватит ли этого?

Между двумя городами можно проехать не обязательно напрямую, а через другие города. Также можно ставить перекрёстки, на которых будут сходиться несколько дорог.

Первое, что приходит в голову, – провести две диагонали с перекрёстком в центре (рис. 1, *а*). Общая длина дорог будет больше 282 км (для тех, кто проходил квадратные корни: длина равна $2 \cdot 100\sqrt{2} = 282{,}84\ldots$), это нас не устраивает. Если соединить дорогами три вершины квадрата буквой П (рис. 1, *б*), то общая длина будет 300 км. Ещё хуже. Получается – нельзя? Можно! Экспериментально, вооружившись линейками, школьники строили системы дорог, меньшие 280 км. Например такую, с двумя перекрёстками (рис. 1, *в*).

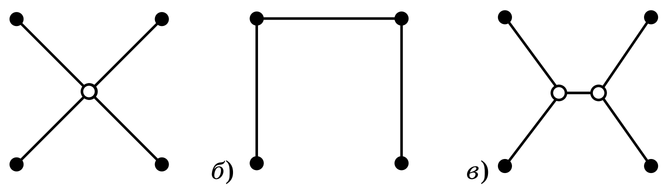


Рис. 1 *а*) *б*) *в*)

А какая система дорог будет самой короткой? И как её построить? Задача кажется сложной. Тем не менее, мы её решим, и не только для вершин квадрата, но и для любого числа городов.

Задача 2. На плоскости дано несколько точек («городов»). Как связать их самой короткой системой дорог?

Кратчайшая система дорог называется *сетью Штейнера* заданных городов, в честь выдающегося геометра Якоба Штейнера (1796 – 1863). В местности с плоским рельефом, например в степи, многие дороги и линии электропередачи проектируются в виде сетей Штейнера. По сетям Штейнера строятся газопроводы в Западной Сибири и в Канаде. Аналоги сетей Штейнера возникают в молекулярной биологии при исследовании происхождения видов. Наконец, сети Штейнера используются при разработке микросхем и компьютерных процессоров: уменьшить длину проводника электрического заряда – значит ускорить работу компьютера.

Мы будем называть точки городами, отрезки между ними – дорогами. Можно ставить дополнительные точки (перекрёстки), где сходятся несколько дорог.

Если городов только два, то тут и решать нечего – отрезок между ними и будет сетью Штейнера. Но уже для трёх городов задача куда сложнее. Она уведёт нас в далёкий XVII век, в эпоху великих открытий и великих имён.

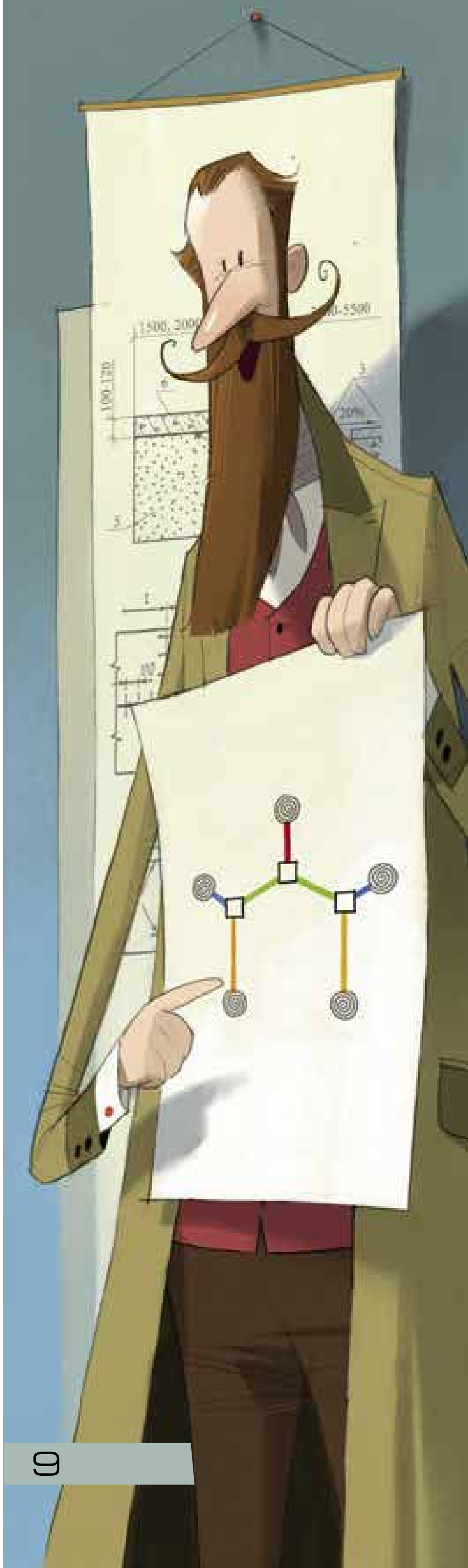
Задача 3. Дан треугольник. Найти точку, сумма расстояний от которой до вершин наименьшая.

Решение задачи 3 ещё не гарантирует нахождения сети Штейнера для трёх точек. Конечно, естественно ожидать, что самая короткая система дорог будет иметь один перекрёсток, из которого исходят отрезки к трём вершинам треугольника. Но ведь для квадрата такое же «естественное» решение оказалось неверным. Поэтому не будем торопиться с выводами.

Какая же точка может дать решение задачи 3? Центр описанной окружности? Нет. В центре описанной окружности остроугольного треугольника достигается минимум наибольшего расстояния до вершин, но никак не суммы расстояний. Точка пересечения медиан? Снова нет. Оказывается, в этой точке достигается минимум суммы квадратов расстояний. Вообще, среди четырёх замечательных точек треугольника ответ искать не стоит. Его даёт другая точка – точка Торричелли.

ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ

История задачи 3 насчитывает более трёх с половиной столетий. В 1659 году она была помещена в книге итальянского физика и механика Винченцо Вивиани (1622–1703) «О максимальных и минимальных значениях». Он был учеником великого Галилея, а нам он более известен как изобретатель ртутного барометра – прибора для измерения



атмосферного давления. Своё сочинение Вивиани, по традициям того времени, снабдил длинным названием: «Пятая книга сочинений Аполлония Пергского о конических сечениях, заключает в себе первые исследования о наибольших и наименьших величинах и признаётся самым замечательным памятником этого великого геометра». В этой книге приведено много задач на максимум и минимум, в том числе наша задача 3. Ещё раньше этой задачей интересовался Бонавентура Кавальери (1598–1647), один из авторов интегрального исчисления. Ею также занимался величайший французский математик Пьер Ферма (1601–1665). Но первое решение, по-видимому, не позднее 1640 года, было получено Эванджелистой Торричелли (1608–1647), ещё одним учеником Галилея. Именно ему и Вивиани уже ослепший Галилей в конце жизни диктовал главы из своих «Бесед о механике». Подобно многим учёным позднего Возрождения, Торричелли был разносторонним человеком. Будучи профессором математики Флорентийского университета, он занимался задачами физики, механики, баллистики и оптики и даже писал работы по конструированию оптических приборов и шлифовке линз. Именно он открыл закон о давлении жидкости, который теперь проходят в школе.

Торричелли сформулировал правильный ответ к задаче 3, но его доказательство нам неизвестно. Скорее всего, решение было основано на физических соображениях. Мы же решим эту задачу геометрически, а для этого попутешествуем во времени: начнём с одного факта, доказанного через два века после Торричелли.

Теорема 1. *Дан треугольник ABC, в котором* $\angle C = 120^\circ$ (рис. 2). *На его стороне AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ABD. Тогда длина отрезка CD равна сумме сторон AC и BC, а прямая CD – биссектриса угла C.*

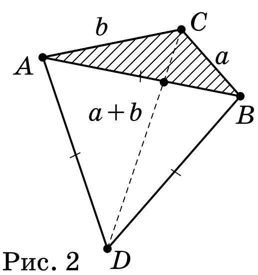


Рис. 2

Эту теорему опубликовал в 1936 году румынский математик Димитрие Помпею. Правда, доказал он её довольно сложно, с помощью комплексных чисел. А зря. Всё можно сделать геометрически, и мы в этом сейчас убедимся.

Доказательство. Построим ещё один равносторонний треугольник, теперь на стороне AC. Назовём его ACE (рис. 3). Рассмотрим треугольник ACD. Если повернуть его на $60°$ вокруг точки A против часовой стрелки, то он перейдёт в треугольник AEB. В самом деле: такой поворот переведёт отрезок AD в AB, а отрезок AC в AE. Значит, сторона CD перейдёт в сторону EB, стало быть, эти стороны равны. Но отрезки EC и CB лежат на одной прямой (потому что $\angle ACE = 60°$, а $\angle ACB = 120°$) и, таким образом, сумма сторон AC и BC равна EB, а значит, равна CD.

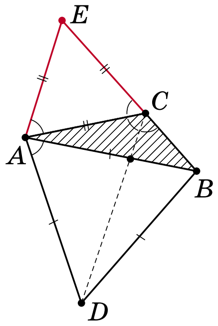


Рис. 3

Наконец, раз поворот на $60°$ переводит CD в EB, угол между этими прямыми равен $60°$, а значит, $\angle BCD = 60°$, то есть CD – биссектриса угла ACB.

А что будет, если угол C не равен $120°$?

В этом случае отрезки EC и CB не будут лежать на одной прямой. И по неравенству треугольника, их сумма будет больше, чем EB. Но поскольку $EB = CD$, мы получаем, что сумма $AC + CB$ больше, чем CD. Мы доказали такое дополнение к теореме 1:

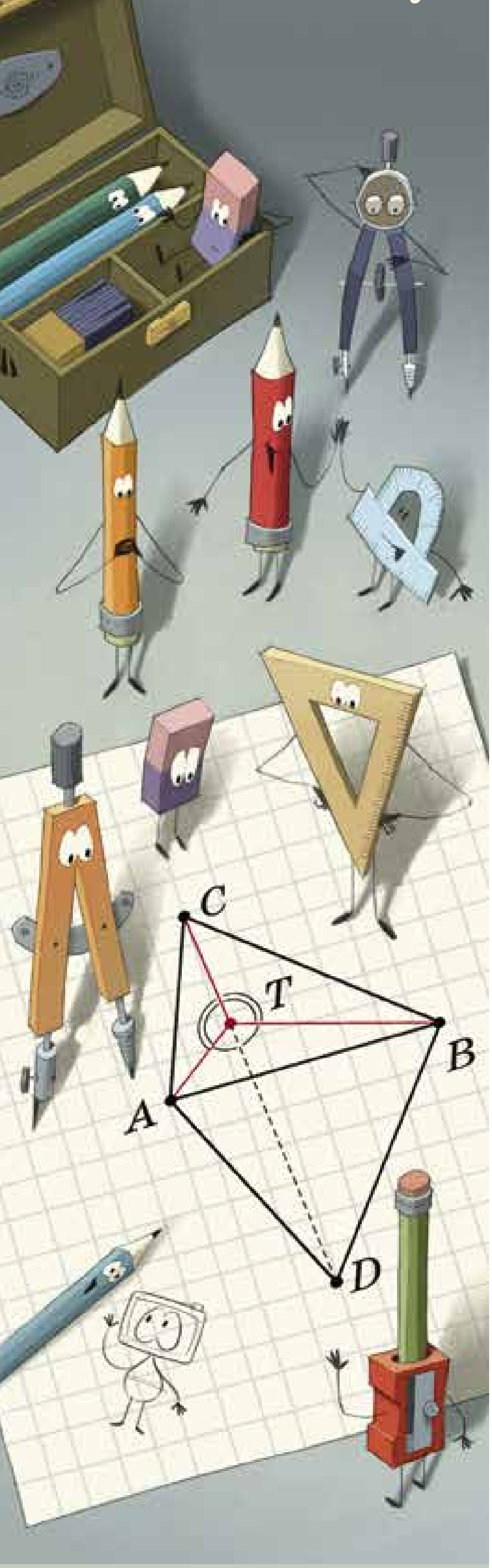
Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *угол C не равен* $120°$, *то длина CD меньше суммы сторон AC и BC.*

Вот теперь пришла очередь определить ту замечательную точку, которая даёт решение задачи 3:

Точкой Торричелли треугольника называется точка, из которой три луча, направленные в вершины треугольника, образуют между собой углы в $120°$.

Понятно, что точка Торричелли, если она есть, лежит внутри треугольника. У точки Торричелли много интересных свойств. Но главное, конечно, – наименьшая сумма расстояний до вершин.

Теорема 3. *Если у треугольника есть точка Торричелли, то для неё сумма расстояний до вершин наименьшая.*



Доказательство. Обозначим наш треугольник через ABC, а его точку Торричелли – через T. Построим на стороне AB во внешнюю сторону равносторонний треугольник ABD (рис. 4, *а*). Так как $\angle ATB = 120°$, можно применить теорему 1: сумма $TA + TB$ равна TD. По той же теореме 1, TD – биссектриса угла ATB. Поэтому угол ATD равен 60°, а значит, отрезки TC и TD лежат на одной прямой. Следовательно, CD равно $TC + TD$, а значит, равно $TA + TB + TC$. Ну а если взять любую другую точку на плоскости? Назовём её M (рис. 4, б). Для неё хотя бы один из трёх углов между отрезками, идущими к вершинам треугольника, не равен 120°. Пусть, например, $\angle AMB \neq 120°$. Тогда применяем теорему 2: сумма $MA + MB$ будет больше MD. А сумма $MD + MC$ не меньше CD. Поэтому $MA + MB + MC$ больше CD, то есть сумма расстояний от M до вершин треугольника больше, чем для точки Торричелли.

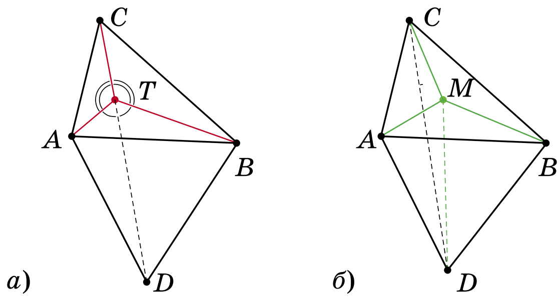


Рис. 4

К сожалению, не у каждого треугольника есть точка Торричелли. Например, её нет у треугольника, один из углов которого 120° или больше. Почему? Пусть, например, $\angle ACB \geqslant 120°$. Для любой точки T внутри треугольника угол ATB больше угла ACB (докажите это!), а значит, больше 120°. Поэтому никакой точки Торричелли внутри него быть не может.

Ну, а если все углы треугольника меньше 120°? Оказывается, что тогда точка Торричелли обязательно существует, причём ровно одна.

Теорема 4. *Если у треугольника все углы меньше 120°, то у него есть точка Торричелли.*

Доказательство. Построим на сторонах нашего треугольника равносторонние треугольники, как показано на рисунке 5. Если сделать поворот вокруг вершины C на 60°, то треугольник CEB перейдёт в треугольник CAF. При этом сторона EB повернётся на 60° и перейдёт в AF. Значит, угол AME между EB и AF равен 60°. Смежный к нему угол AMB равен 120°. Точно так же – отрезок DC пересекает отрезок AF под углом 60°. А теперь применим теорему 1 и получим, что MD – биссектриса угла AMB и поэтому она также пересекает отрезок AF под углом 60°. Итак, прямые DM и DC пересекают прямую AF под равными углами, значит, они совпадают. Получается, что отрезки AF, BE и CD пересекаются в одной точке M и образуют друг с другом равные углы по 60°. Таким образом, M – точка Торричелли.

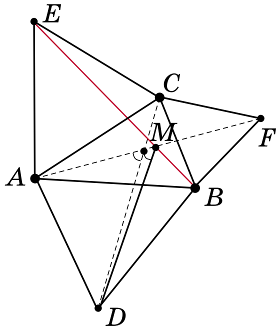


Рис. 5

Из нашего доказательства следует способ построения точки Торричелли. Надо построить во внешнюю сторону равносторонние треугольники и провести отрезки AF, BE и CD. Они пересекаются в одной точке, и это – точка Торричелли (рис. 6). Более того, эти три отрезка ещё и равны по длине, которая и есть сумма расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника.

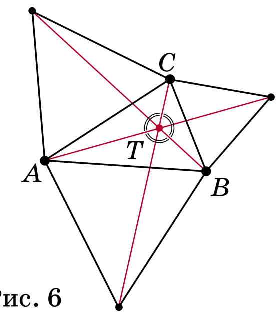


Рис. 6

Если у треугольника есть угол 120° или больше, то точки Торричелли у него нет. А где же тогда достигается наименьшая сумма расстояний до вершин? Ответ: в вершине наибольшего угла (того самого, который не меньше 120°). Вы сами сможете легко это доказать, но только после того, как прочитаете вторую часть статьи в следующем номере.

Продолжение следует.

Художник Алексей Вайнер