

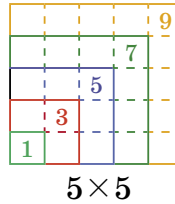
СТЕПЕНИ КАК СУММЫ,

или МАГИЯ МЁССНЕРА

Если выбросить из натурального ряда все чётные числа, то суммировать оставшиеся, нечётные числа легко и приятно – получаются просто квадраты:

$$\begin{aligned} 1 + 3 &= 4 (= 2 \times 2) \\ 1 + 3 + 5 &= 9 (= 3 \times 3) \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 (= 4 \times 4) \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 (= 5 \times 5) \end{aligned}$$

Это, кстати, можно объяснить геометрически: например, квадрат 5×5 состоит из угловой клетки, примыкающего к ней уголка из трёх клеток, следующего за ним уголка из пяти клеток и т.д.



А что если вычёркивать не каждое второе, а каждое третье число?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3		7	12		19	27		37	48	

На первый взгляд, в последовательности сумм (она написана во второй строке) закономерности не видно. Но не будем отчаиваться, а выкинем уже из этой последовательности сумм каждое второе число и просуммируем. Получатся... кубы!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3		7	12		19	27		37	48	
1			8			27			64		

Аналогично можно получить и четвёртые степени (если начать с вычёркивания каждого четвёртого числа, потом в суммах вычёркнуть каждое третье, и в суммах сумм – каждое второе), и какие угодно ещё. Это открыл Альфред Мёсснер (Alfred Moessner) в 1951 году. С тех пор появились разные доказательства этого факта – некоторые из них обсуждаются, например, в видеоролике Буркарда Полстера kvan.tk/moessner – но в основном не такие уж простые. Может быть, вы придумаете своё объяснение?

В заключение посмотрите на таблицу чисел ниже и попробуйте придумать (а может, и доказать?) ещё одну теорему, похожую на теоремы Мёсснера.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	2		6	11		18	26	35		46	58	71	85	
			6			24	50			96	154	225		
						24				120	274			
										120				



СМОТРИ!

Материал подготовил
Григорий Мерзон



Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 1951 Nr. 3
Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen
Von Alfred Moessner in Gunzenhausen
Vorgelegt von Herrn O. Perron am 2. März 1951



Художник Сергей Чуб