# XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ
## ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

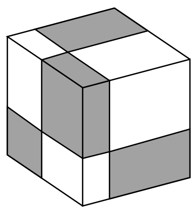

10 и 24 октября 2021 года состоялся осенний тур XLIII Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

### Базовый вариант

**1 (4 балла).** Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира: $2021:43=47$. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

*Алексей Заславский*

**2 (5 баллов).** Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.



*Олег Смирнов*

**3 (5 баллов).** У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом – серебряные, в третьем – бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?

*Михаил Евдокимов*

**4 (5 баллов).** Выпуклый $n$-угольник ($n>4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный.

Докажите, что среди любых четырёх сторон этого $n$-угольника есть хотя бы две равных.

*Максим Дидин*

**5 (5 баллов).** В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой?

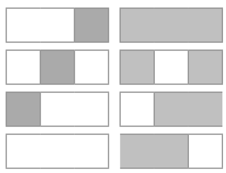
*Борис Френкин*


## Сложный вариант

**1 (5 баллов).** В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим $n$ числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться $n$?

*Алексей Заславский*

**2 (6 баллов).** На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок $1 \times 3$ из трёх квадратиков $1 \times 1$, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые – тоже? (Полоски не должны перекрываться.)



*Дмитрий Ильинский*


**3 (7 баллов).** В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой описанная окружность исходного треугольника?

*Максим Волчкевич*

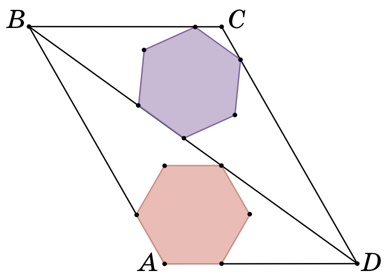
# XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ

## ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ


**4 (8 баллов).** На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

*Александр Грибалко*

**5 (9 баллов).** Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю $BD$ на два равных треугольника. В треугольник $ABD$ вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на $AB$ и $AD$, а одна из вершин – на $BD$. В треугольник $CBD$ вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на $CB$ и $CD$, а одна из сторон – на $BD$. Какой из шестиугольников больше?




*Константин Кноп*

**6 (9 баллов).** Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа $x$ (то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Докажите для любых натуральных чисел $a_1$, $a_2, \ldots, a_n$ неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

*Максим Дидин*

**7 (12 баллов).** На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

*Александр Грибалко*

Художник Сергей Чуб