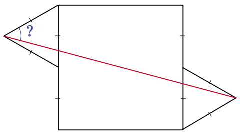
НАШ КОНКУРС, II тур («Квантик» № 10, 2021)

6. *Кресла в самолёте расположены в 30 рядов. Расстояние между рядами одно и то же, расстояние между спинками кресел, идущих друг за другом, равно 80 см. С целью добавить новые ряды, пустое пространство перед каждым креслом решили уменьшить на 5 см. Сколько теперь поместится рядов в салоне самолёта?*

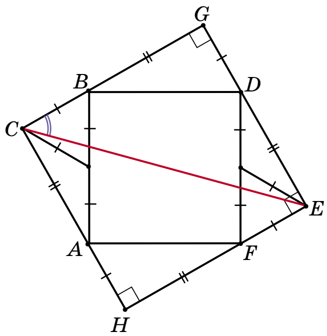
Ответ: 32. Всего добавилось $30 \cdot 5 = 150$ см свободного места, его как раз хватит на два новых ряда кресел (с расстоянием 75 см между спинками кресел, идущих друг за другом).

Замечание. Если изначально могло быть лишнее свободное место, но его не хватало на ещё один ряд (скажем, 75 см), то после уменьшения расстояния могло поместиться и 3 новых ряда.

7. *Во внешнюю сторону от квадрата построены два равносторонних треугольника с вдвое меньшей стороной (см. рисунок). Чему равен угол, отмеченный знаком вопроса?*



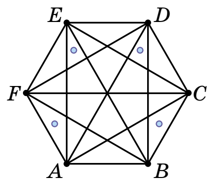
Ответ: 45°. Заметим, что вершины A, B и C образуют прямоугольный треугольник (по условию его медиана из вершины C равна половине стороны AB, к которой она проведена.) То же верно и для треугольника DEF. Продлив стороны CA, CB, ED и EF, получим ещё два таких же прямоугольных треугольника BGD и AFH, а значит, $CGEH$ – квадрат, и искомый угол между его диагональю CE и стороной CG равен 45°.



8. *Несколько интровертов и экстравертов хотят разбиться на четыре команды. Каждый по очереди выбирает команду, причём интроверты выбирают какую-то команду минимального размера на момент выбора, а экстраверты – максимального. Могли ли команды получиться попарно различного размера?*

Ответ: нет. Посмотрим на размеры трёх меньших команд. Изначально они равны (нулю). Добавление экстраверта не меняет эти размеры, а интроверт может увеличить разницу между ними, только если до него они были равны, причём разница увеличится до 1. Значит, размеры трёх меньших команд отличаются не больше чем на 1. Тогда три размера принимают два значения, и какие-то два размера совпадают.

9. *Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Любые три его вершины образуют треугольник, всего таких треугольников 20. Квантик хочет отметить внутри шестиугольника как можно меньше точек, чтобы внутрь каждого из этих 20 треугольников попала хоть одна отмеченная точка. Приведите пример, как отметить точки, чтобы выполнялось это условие, и докажите, что меньше точек отметить нельзя.*



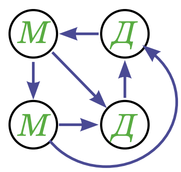
Пример, как отметить 4 точки, см. на рисунке. Менее чем 4 точками не обойтись: отрезки EA, AC и CE делят шестиугольник на 4 непересекающихся треугольника, в каждом должна быть хоть одна отмеченная точка.

10. *В классе в турнире по армрестлингу каждый сыграл с каждым (ничьих в армрестлинге не бывает). Каждый мальчик одержал вдвое больше побед, чем потерпел поражений, а каждая девочка – вдвое меньше побед, чем поражений.*

а) Приведите пример, как такое могло быть.

б) Обязательно ли при этом какая-нибудь девочка победила какого-нибудь мальчика?

Ответ: а) см. рисунок; б) да.



б) Игр у всех было поровну, поэтому у мальчиков поровну поражений (треть от числа игр). Пусть каждый мальчик выиграл у каждой девочки. Тогда все поражения у мальчиков были от мальчиков, и раз поражений поровну, то и побед у каждого мальчика над мальчиками одинаково.

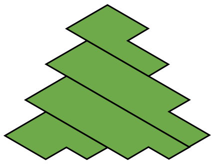
Пусть мальчиков $М$, а девочек $Д$. Тогда каждый мальчик сыграл $М-1$ партий с мальчиками и $Д$ партий с девочками. Из них $(М-1)/2+$ $+Д$ побед и $(М-1)/2$ поражений. Но тогда $Д=(М-1)/2$. Из аналогичного рассуждения для девочек $М=(Д-1)/2$, что невозможно.

ГРОМ И МОЛНИЯ («Квантик» № 11, 2021)

Звук грома доходит от места, где ударила молния, не сразу: скорость звука – около 330 м/с, это примерно 1 км за 3 секунды (а скорость света почти в миллион раз больше, так что вспышку молнии мы видим практически мгновенно).

Звук распространяется ото всех частей молнии, а молния имеет заметную длину. Кроме того, звук может отражаться от препятствий. Из-за этого гром и звучит долго.

ЁЛОЧКА – 2022



ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

6. Ответ: сеть из пункта б). В сети из пункта а) есть две дороги под углом меньше 120°, в сети из пункта в) есть замкнутый путь из дорог.

7. Например, подойдёт трапеция, у которой углы при меньшем основании равны 120° и меньшее основание равно боковым сторонам. Разбор всех случаев в алгоритме даёт единственную допустимую сеть из двух боковых сторон и меньшего основания.

8. Аналогично случаю квадрата получаем всего две допустимые сети (рис. 1). Сеть слева имеет меньшую суммарную длину дорог, значит, это сеть Штейнера.

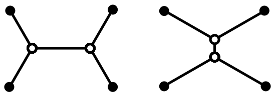


Рис. 1

9. Вот допустимые сети, которые удалось нам найти (рис. 2). Сети, получающиеся поворотом или переворотом этих, мы отбрасывали.

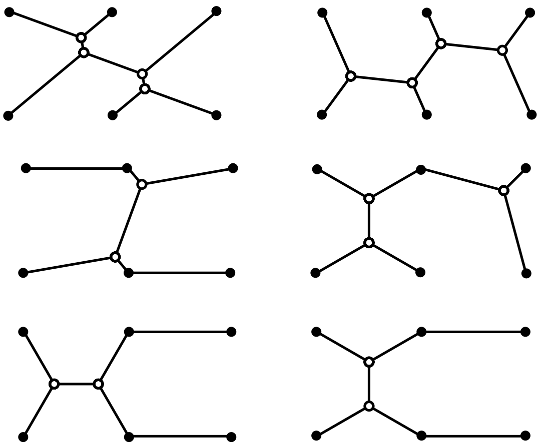


Рис. 2

10. Бывает всего 5 допустимых сетей, которые получаются поворотом из той, что на рисунке 3.

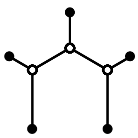


Рис. 3

11. Установим магазин в произвольной точке, соединим её с деревнями и проведём перпендикуляр к дороге. Отразим всю эту картинку относительно прямой, на которой лежит дорога. Получим сеть, соединяющую четыре деревни: две настоящие и две воображаемые (зеркальные копии настоящих). Сумма длин дорог этой сети вдвое больше суммы расстояний от магазина до деревень и дороги. Деревни лежат в вершинах квадрата со стороной 10 км, и, как мы знаем, у квадрата есть ровно две минимальных сети. Только у одной из них перекрёстки симметричны друг другу относительно дороги. Поэтому магазин нужно расположить в перекрёстке этой сети, чтобы сумма расстояний до деревень и дороги была минимальна.

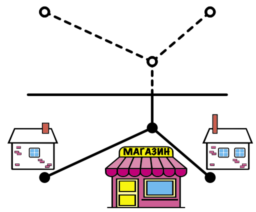


Рис. 4

12. См. рисунок 5.

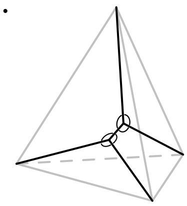
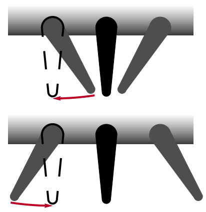


Рис. 5

ДВЕ МНОГОНОЖКИ

Заметим, что местами ноги сведены в тесные пучки, а в промежутках они растопырены. Эти скопления и разряжения ног и движутся вдоль многоножек как волны. У многоножки № 1 пучки состоят из поднятых ног, а стоящие ноги растопырены, у многоножки № 2 – всё наоборот.

Пусть волны движутся по многоножкам влево, куда тогда движутся сами многоножки? Посмотрим на поднятые ноги и их левых соседей. Волна перейдёт к этим соседям, то есть они поднимутся вертикально. Для многоножки № 1 это означает поворот ноги влево, а для многоножки № 2 – вправо (см. рисунок). Значит, первая шагает по ходу движения волны, а вторая – навстречу.



Увидеть по-разному ползущих многоножек можно по ссылкам kvan.tk/mnogonog1 и kvan.tk/mnogonog2 на видео.

СОМ АЛИ

Решая задачи на письменность, нужно сначала определить, что в ней обозначает один символ. По этому признаку письменности делятся на три типа (кроме некоторых более сложных):

– иероглифические (1 символ – 1 слово, как в китайском языке);

– слоговые (1 символ – 1 слог, как в японском языке);

– алфавитные (1 символ – 1 звук, как в русском и английском языках).

Здесь, очевидно, не иероглифическая система письма, не слоговая (потому что слишком много символов), а алфавитная.

Затем надо определить направление письма, то есть читаются ли буквы справа налево (как в арабском языке или языке иврит) или слева направо (как в русском или английском языках). Судя по тому, что сомалийские слова выровнены по левому краю, читать надо слева направо.

Для начала можно предположить, что слово 6 (𐒍𐒘𐒃𐒘) – это «Того», ведь это единственное четырёхбуквенное слово с одинаковыми второй и четвёртой буквой. Но это ловушка: как только мы решим, что 𐒘 – это ‘о’, и подпишем его в остальных местах, окажется, что у нас целых три слова, которые после ‘о’ заканчиваются одинаково (это слова 7, 9 и 12), а поскольку таких слов среди русских нет (у всех слов с ‘о’ – «Габон», «Лаос», «Молдова», «Сальвадор» и «Эстония» – после ‘о’ идут разные части), приходится признать, что слово 6 – это всё-таки не «Того».

Посмотрим на начала и концы сомалийских слов: в начале слов 3 раза повторяется буква 𐒑, а в конце 5 раз повторяется буква 𐒖. Здесь мы ещё раз убеждаемся в том, что читать сомалийские слова следует слева направо (ведь самая частая начальная буква русских слов, ‘м’, повторяется только 4 раза, и 5 раз в сомалийских словах повторяться не может, зато может 3 раза – в задаче сказано, что некоторые русские слова на сомалийский не переведены), и сопоставляем букву ‘м’ со знаком 𐒑. Самые частые конечные буквы в русских словах – это буквы ‘а’, ‘н’ и ‘я’, встречающиеся по 3 раза, но, учитывая то, что русская буква ‘я’ на самом деле обозначает сочетание звуков [йа], можно объединить слова, оканчивающиеся на буквы ‘я’ и ‘а’, в слова, которые заканчиваются на звук [а], и сделать вывод, что 𐒖 читается именно так.

Тогда по количеству букв слово 1 – это «Мальта», слово 12 как единственное оставшееся слово вида «Ма…а» – это «Малайзия», слово 8 – «Молдова» (если бы это был «Мадагаскар», там должно было бы быть три ‘а’), слово 10 – это «Лаос», слово 2 – это «Бангладеш» и так далее.

Вот значения не определённых ранее слов: слово 3 – это «Габон», 4 – «Перу», 5 – «Непал», 7 – «Латвия», 9 – «Эстония», 11 – «Казахстан».

А слово 6 «?и?и», которое сначала можно было ошибочно принять за «Того», – это слово «Фиджи», и отсюда видно, что сочетание звуков [дж] записывается в этой письменности одним знаком (как *J* в английском алфавите).

Установив верные соответствия, можно выписать несколько различий между русским алфавитом и письменностью исмания:

– русский записывает [йа] одной буквой ‘я’, а исмания – двумя;

– русский записывает [дж] двумя буквами, а исмания – одной;

– русский различает ‘э’ и ‘е’, а исмания – нет;

– после мягкого [л’] в русском пишется мягкий знак, исмания не различает мягкое и твёрдое ‘л’;

– русский различает звуки ‘с’ и ‘з’ и записывает их по-разному, а в сомалийском языке нет звука ‘з’ и поэтому оба звука записываются как 𐒈;

– аналогично в сомалийском языке, как и в арабском, нет звука ‘п’ и исмания записывает его как ‘б’ (𐒁);

– и ещё в сомалийском языке нет звука ‘в’ и исмания записывает его как ‘ф’ (𐒍).

Вот как решается задание 2:

𐒍𐒖𐒇𐒖𐒒𐒈𐒕𐒈𐒏𐒖 – (Ф/В)арансйска (на самом деле Фарансииска) – Франция;

𐒃𐒖𐒁𐒛𐒒 – Джа(б/п)?н – (на самом деле Джабаан) – Япония;

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒏𐒓𐒇𐒘𐒕𐒖 – К?нфур К?рийа (на самом деле Коонфур Куурийа) – Южная Корея (как выбрать между Южной и Северной, см. ниже);

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒖𐒍𐒇𐒘𐒏𐒖 – Коонфур Африка – ЮАР, ведь страны «Северная Африка» или «Северно-Африканская республика» нет, следовательно, Коонфур – «южный».

В заключение можно сказать, что сомалийский язык, в отличие от русского, различает краткие и долгие гласные (но из задачи этого понять нельзя). 𐒕 в слове «Фарансииска» – это долгое «и», 𐒛 в слове «Джабаан» – это долгое «а», а 𐒝 и 𐒓 в словосочетании «Коонфур Куурийа» – это долгие «о» и «у» соответственно.

ПУШКИН, НАБОКОВ, ИСКАНДЕР

Выдумана история про Набокова. Выдумана, да не совсем: писатель действительно очень любил анаграммы. *Вивиан Дамор Блок*, *Блавдак Виномори*, *Дориан Вивалкомб*, *барон Клим Авидов* – все эти персонажи у Набокова и в самом деле есть, а вот адмирала Ивана Бовка нет и быть не могло.

И дело не в том, что такого человека никогда не существовало. На это указывают две явные исторические ошибки: «Элефант» (то есть «Слон») был флагманским кораблём не русского, а шведского флота и в ходе сражения при Гангуте достался русским в качестве боевого трофея; чин контр-адмирала был введён в России только в 1732 году.

Дело в том, что в словах *Владимир Набоков* – два *а* и два *о*, а в словах *адмирал Иван Бовк* – три *а* и одно *о*, так что анаграмма получилась бы неправильная. Такой небрежности эстет и педант Набоков никогда бы не допустил.

XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ. ОСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

1. Ответ: ещё четыре раза. Номер турнира N на $2021-43=1978$ меньше номера года M, в котором проводится осенний тур этого турнира, и так будет всегда. Поэтому $M:N=1+1978:N$. Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного Турнира.

Но $1978=43\cdot 23\cdot 2$, оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на себя. Тогда явление повторится в 2024, 2064, 2967 и 3956 гг.

2. Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A.

Как найти объём какого-то белого параллелепипеда α? Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, войдут в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, – по разу. Поделив полученное число на объём β, получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3. Ответ: 5 монет. *Пример.* Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трёх видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то её достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

Оценка. Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырёх разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: [З, смеш., С, смеш., Б] и [смеш., З, смеш., Б, С], не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4. Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол n-угольника – угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трёх острых углов (сумма внешних углов равна 360°, поэтому среди них не больше трёх тупых), значит, этих групп не больше трёх. Следовательно, среди каждых четырёх сторон найдутся две из одной группы, то есть равные.

5. Ответ: обязательно. Будем говорить, что шахматист A не слабее шахматиста B, если A выиграл и белыми, и чёрными не меньше партий, чем B. Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинаковое число побед чёрными. Значит, число побед белыми у всех разное и число побед чёрными – тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, ..., 2, 1 и 0, и то же для количеств побед чёрными. Пусть 19 партий белыми выиграл A, а 19 партий чёрными выиграл другой шахматист B. Тогда игру A с B, где A играл белыми, а B – чёрными, выиграли и A, и B. Но это невозможно, откуда 19 партий белыми и чёрными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.

Сложный вариант

1. Ответ: 3 или 4.

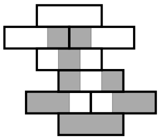
Примеры: -1, $1/2$, 2 и -3, -1, 1, 3.

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших из них: $a-d$, a, $a+d$, где $0<d<a$. Обратные числа идут в обрат-

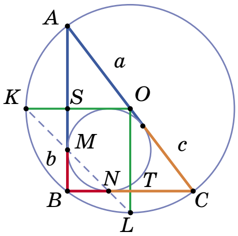
ном порядке: $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$, но

$$\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}.$$

2. Ответ: можно, см. пример на рисунке.



3. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть ABC – наш треугольник с прямым углом B, точка O – центр его описанной окружности, M и N – точки касания вписанной окружности с катетами AB и BC соответственно, K и L – середины дуг AB и BC. Достаточно доказать, что M и N лежат на KL.

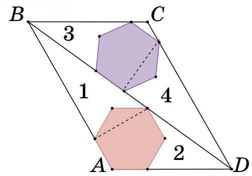


Опустим перпендикуляры OS и OT на катеты AB и BC и продлим их до пересечения с описанной окружностью в точках K и L. Обозначим длины касательных из точек A, B, C к вписанной окружности через a, b, c соответственно. Треугольник KOL равнобедренный прямоугольный. Заметим, что $KS = OK - OS = \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2} = \frac{a-b}{2}$. Если M' – точка пересечения KL с AB, то $SM' = SK = \frac{a-b}{2}$, откуда $SM' + MB = SK + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$, а значит, M' и M совпадают. Аналогично KL содержит N.

4. Ответ: нет. На первом ходу Вася не проиграет, так как нет двузначных квадратов с цифрой 7. Покажем, что далее каждый может приписать в конец текущего числа 2 или 3 так, чтобы соперник не выиграл следующим ходом.

Пусть у нас было число A, и соперник может сделать квадрат, приписав цифру как к числу $\overline{A2}$, так и к числу $\overline{A3}$. Поскольку точные квадраты не оканчиваются ни на 2, ни на 3, он припишет цифру в конец: скажем, x – в первом случае, и y – во втором. Тогда оба числа $\overline{A2x}$ и $\overline{A3y}$ – точные квадраты, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трёхзначное, и тогда разность между соседними точными квадратами не меньше $11^2 - 10^2 > 20$. Противоречие.

5. Ответ: тот, который примыкает к вершине A. Приведём решение, найденное на турнире семиклассником Макаром Чудновским.



Параллелограмм разделён на 2 данных шестиугольника, 4 невыпуклых четырёхугольника, обозначенные на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине C. Заметим, что четырёхугольники 1 и 4 подобны – они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом 120° при вершине. Аналогично, подобны четырёхугольники 2 и 3.

Но коэффициенты подобия равны отношению сторон шестиугольников. А площади половинок параллелограмма ABD и CBD равны, причём первая состоит из первого шестиугольника и четырёхугольников 1 и 2, а вторая – из второго шестиугольника, четырёхугольников 3 и 4 и ещё белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине A, больше.

6. Очевидное неравенство $(a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 0$ перепишем в виде $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Так как число справа – целое, то и $\left\lceil \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rceil \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Сложив такие неравенства, получим требуемое.

7. Ответ: при любом. Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Ясно, что Малыш всегда может взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше 10 с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш сначала берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. Изначально эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, в конце она будет не меньше 10. После каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Значит, в какой-то момент она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей!