СУММЫ ТРЁХ КУБОВ

Недавно в «Квантике» обсуждалось[1], какие числа можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. А какие числа можно представить в виде суммы трёх кубов целых чисел?

Скажем, числа 1, 2 и 3 можно записать в виде суммы трёх кубов, используя лишь единицы и нули, числа 6, 7, 8, 9 и 10 можно записать, используя кубы чисел 2, 1, –1 и 0 (например, $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3$), $11 = 3^3 - 2^3 - 2^3$, а вот попытки разложить на сумму трёх кубов числа 4 и 5 к успеху не приводят.

Оказывается, дело вот в чём. Кубы дают остатки 0, 1 или 8 при делении на 9 (это легко проверить, возведя в куб числа от 0 до 8). Поэтому числа, которые дают остаток 4 или 5 при делении на 9, в виде суммы трёх кубов непредставимы. Про все остальные целые числа есть гипотеза: они представимы в виде суммы трёх кубов целых чисел (не обязательно положительных!). Но доказать гипотезу пока не удаётся.

Например, для числа 33 такое представление нашли только в 2019 году (Эндрю Букер):

$$33 = 8866128975287528^3 + (-8778405442862239)^3 + \\ + (-2736111468807040)^3,$$

а для числа 42 – в 2020-м (Эндрю Букер, Эндрю Сазерленд):

$$42 = (-80538738812075974)^3 + 80435758145817515^3 + \\ + 12602123297335631^3.$$

В обоих случаях использовался компьютерный перебор – но, конечно, не всех чисел подряд (возникающие числа слишком велики!): использовались разные соображения из теории чисел. На этом вопрос про представимость чисел от 1 до 100 полностью исследован, но как решать общую задачу – всё ещё непонятно.

Ожидается даже, что каждое число, представимое в виде суммы трёх кубов, представимо бесконечным числом способов. Например,

$$2 = (1 + 6t^3)^3 + (1 - 6t^3)^3 + (-6t^2)^3$$

для любого целого t. Но уже для числа 3 неизвестно, конечно или бесконечно число представлений.

[1] Г. Мерзон. Косые квадраты: от Пифагора до Ферма («Квантик» №7 за 2021 год).

Интересно, что в виде суммы трёх кубов *рациональных* чисел представляется уже любое рациональное число – есть даже явная формула:

$$N=\left(\frac{27N^3-1}{27N^2+9N+3}\right)^3+\left(\frac{-27N^3+9N+1}{27N^2+9N+3}\right)^3+\left(\frac{27N^2+9N}{27N^2+9N+3}\right)^3.$$

Более того, есть явная формула даже для бесконечного числа представлений данного числа N:

$$\left(\frac{27N^3-t^9}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3+\left(\frac{-27N^3+9Nt^6+t^9}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3+\left(\frac{27N^2t^3+9Nt^6}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3$$

(предыдущая формула получается при $t=1$).

Здесь явный контраст с задачей про сумму двух квадратов, где переход к рациональным числам ничего не меняет: если целое число является суммой двух рациональных квадратов, то оно является и суммой двух целых квадратов.

Задачи

1. Найдите представление числа 3 в виде суммы трех кубов, отличное от очевидного $1^3+1^3+1^3$.

2. Выясните, какие остатки по модулю 8 может давать сумма трёх квадратов. Убедитесь, что целых положительных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов, бесконечно много.

3. Хорошо известно, что у уравнения $x^3+y^3=z^3$ нет решений в целых положительных числах (это частный случай Великой теоремы Ферма, доказанный ещё Эйлером). А существуют ли такие целые положительные x, y, z, что равенство $x^3+y^3=z^3$ выполняется с погрешностью не более 0,01% от величины числа z?

4. (*XXXI Турнир городов, Михаил Мурашкин*) Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}$?

5. (*XXXV Турнир городов, Bong-Gyun Koh*) Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Ответы в следующем номере

Художник Мария Усеинова