

КВАДРАТУРА ЛУНОЧКИ

Эту историю мы позаимствовали у древних египтян – только добавили некоторые подробности и пояснения. Как-то бог Солнца Ра разгневался на богиню неба Нут за непослушание. Страшен был его гнев.

– Знай же, несчастная, что отныне не суждено тебе иметь потомства! Я проклял все 360 дней в году – ни в один из них ты не сможешь рожать детей и навечно останешься бездетной.

Жестоко раскаялась Нут в своём проступке. На коленях и со слезами на глазах умоляла она властителя вселенной смягчить свой гнев. Но всё было тщетно – никто не смог бы отменить жестокое проклятие, наложенное самым могущественным богом на свете.

– Неужели никогда я не услышу детского смеха? Ведь в году всего 360 дней, и все они прокляты, – причитала Нут.

Убитая горем, она не заметила, как подошёл к ней Тот – бог мудрости, с фигурой человека и головой птицы ибис. Бог Тот покровительствовал учёным и чиновникам. Благодаря ему люди научились сохранять свои знания и законы, а также передавать их потомкам. Он подарил людям письменность, причём не какие-то бессмысленные значки, которые делают все слова похожими, так что слово «сила» можно перепутать со словом «лиса». Алфавит Тота состоял из картинок, и каждое изображение имело собственный смысл. Словами можно было украшать памятники и гробницы, так что люди, звери, птицы и растения, изящно выведенные на стенах, в то же время представляли собой буквы, а из этих букв возникали наполненные глубоким смыслом слова. Могущественным богом был Тот, но даже ему было не под силу отменить решение Ра.

– Сила в данном случае бессильна, – скаламбурил он. – Но я всё же знаю, как тебе помочь. Тут нужна хитрость и немного мудрости – её, впрочем, мне не занимать.

Бог Тот напросился в гости к богине времени Луне (по-египетски – Хонсу). Луна встретила его радостно – ей очень не хватало общения и хорошей компании, ведь со звёздами особо не поболтаешь. Она просто не знала, как убить время.



– Попробуй решить мою головоломку про луну, точнее, про луночку, – предложила Луна. – Я её только что придумала, и, кажется, она вышла на славу. Даже тебе, богу мудрости, будет непросто её раскусить.

– Готов попробовать, если ты предложишь мне достойный приз за правильное решение, – ответил Тот.

– Но что я могу тебе предложить? У меня же ничего нет, кроме времени.

– Время – это как раз то, чего мне не хватает. Я недавно изобрёл письменность и теперь решил написать книжку, уже даже придумал название – «Книга Живых», но всё не могу выкроить время. Короче говоря, пяти дней в год мне будет вполне достаточно в качестве скромного вознаграждения.

– Ладно, пяти дней не жалко, – сказала Луна. – Слушай внимательно.

Задача про луночку. Изобрази два круга. Первый круг опиши своим посохом. Удвой первый круг – получишь второй круг. Расположи второй круг так, чтобы он высек из первого круга луночку. Площадь луночки должна равняться площади квадрата, построенного на твоём посохе. Если исполнишь всё в точности, то получишь пять дней в подарок.

– Дело в шляпе, – сказал Тот богине Нут, когда вернулся от Луны. – Нам только нужно решить задачу, и у тебя будет целых пять лишних дней в году. Рожай – не хочу.

– Но как же мы её решим? Я и условие с трудом понимаю. Как это – описать круг твоим посохом?

– Это несложно, если ты мне поможешь. Тебе нужно только держать конец посоха, чтобы он никуда не съезжал, пока посох будет поворачиваться.

Нут взяла конец посоха, а Тот повернул посох вокруг неё так, что второй конец описал на песке полный круг.

– Я слышала от богини Маат, что длина твоего посоха – ровно одна схена¹, – сказала Нут, когда первый круг был закончен. – Значит, радиус первого круга – 1 схена.

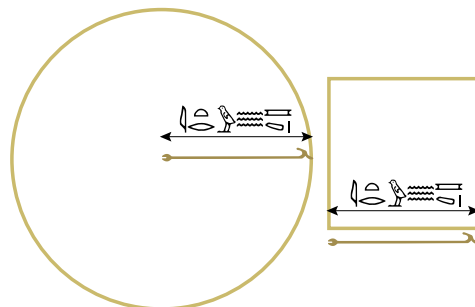
¹ То есть 10 с половиной километров – известно, что габаритами боги намного превосходили людей.





– Совершенно верно, – ответил Тот. – А сможешь ли ты догадаться, что значит «квадрат, построенный на посохе»?

– Я думаю, это просто квадрат, у которого все стороны равны одной сцене. – Рядом с кругом Нут изобразила квадрат, отмерив посохом стороны квадрата.

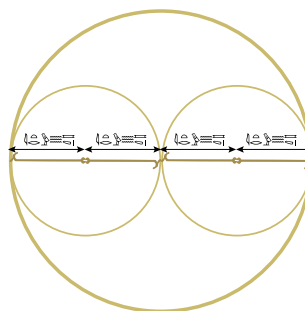


– Теперь нужно удвоить круг, – сказал Тот, – это напоминает какую-то древнюю задачу, о которой говорил мой приятель из северного племени гипербореев. Его имя мне запомнилось, потому что оно очень необычно – Квантик. Кажется, в той задаче нужно было удвоить куб, и почему-то это невозможно было сделать.

– Почему же невозможно? – удивилась Нут. – Удвоить – это просто. Надо очертить круг, взяв посох в два раза длиннее, чем твой. То есть посох длиной 2 сцены.

– Нет-нет-нет, – возразил Тот, – в задачах об удвоении всегда речь идёт о том, чтобы удвоилась площадь. Это если говорят о круге или квадрате. А если речь идёт о кубе, то нужно, чтобы объём стал в два раза больше. Если ты в два раза увеличишь радиус круга, площадь увеличится гораздо больше, чем в два раза.

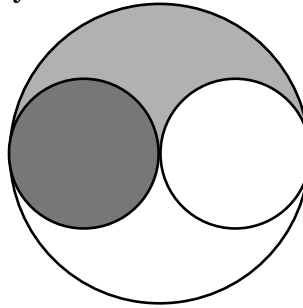
В подтверждение своих слов Тот начертил на песке картинку.



– Да, – согласилась Нут, – действительно, в круге радиуса 2 целиком поместились два круга радиуса 1 и ещё осталось много свободной площади. Интересно, а сколько именно площади осталось?

– Осталось две одинаковые фигуры. Греки-сапожники называют такие арбелосами, – стал размышлять вслух Тот. – Мне кажется, каждый из них имеет такую же площадь, как и круг радиуса 1.

Задача 1. Прав ли Тот? Правда ли равны площади, закрашенные тёмно-серым и светло-серым на рисунке?

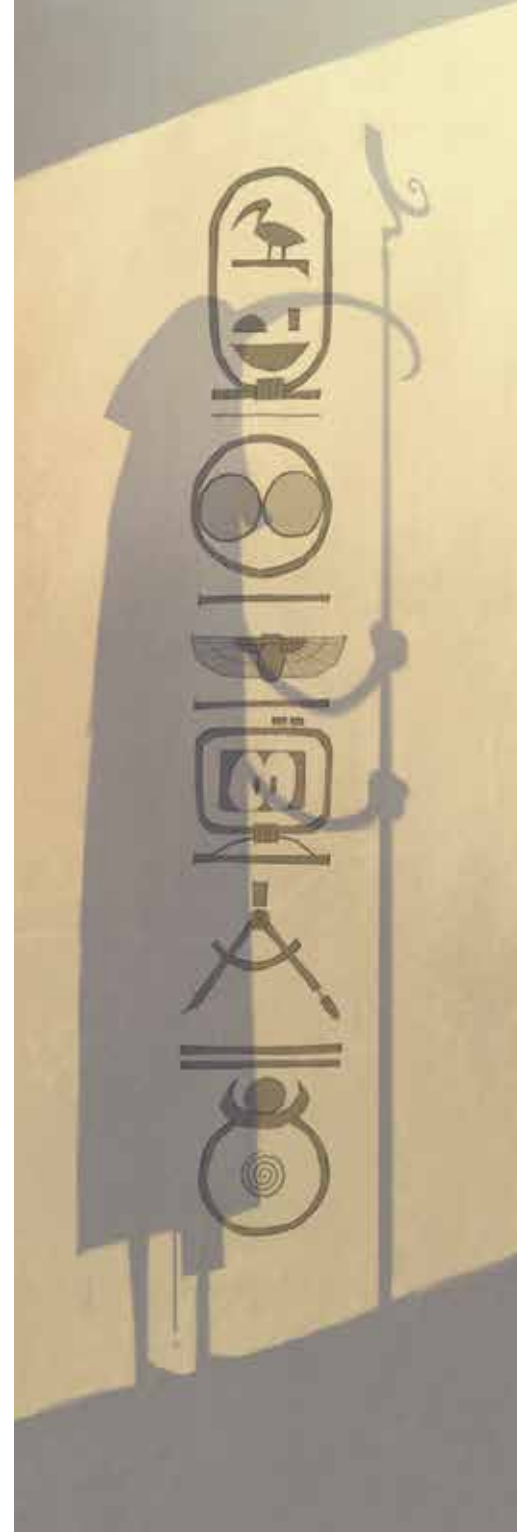


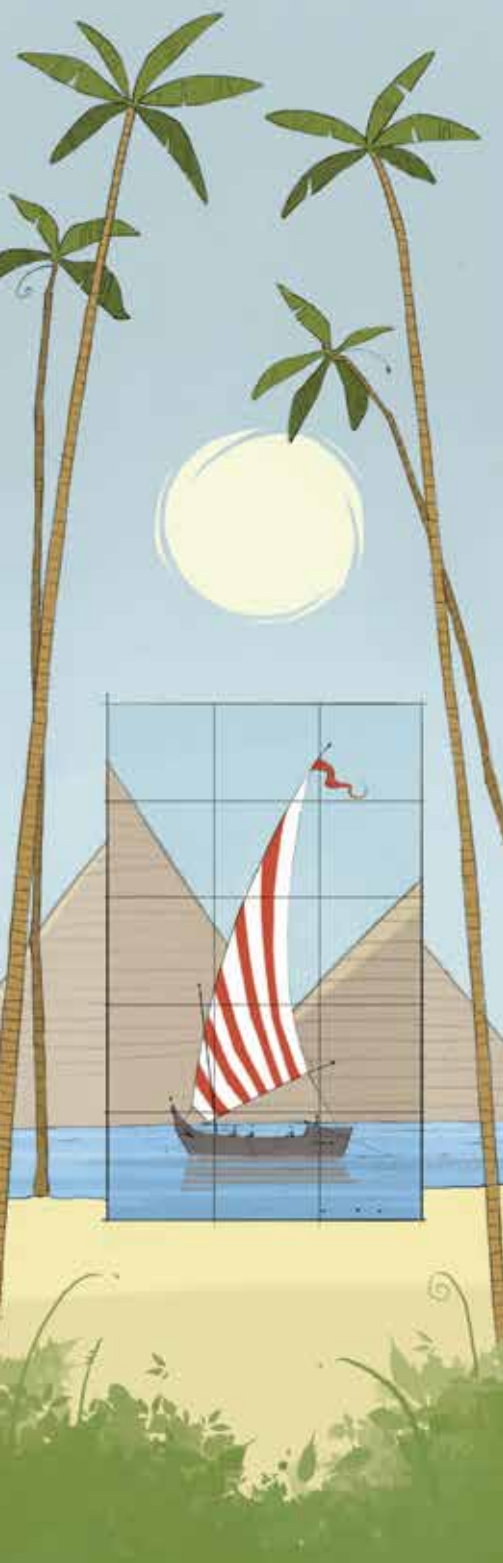
– Ты хочешь сказать, что круг радиуса 2 по площади ровно в 4 раза больше круга радиуса 1? – удивилась Нут. – А почему? Я понимаю, почему площадь квадрата со стороной 2 ровно в 4 раза больше, чем площадь квадрата со стороной 1. Потому что квадрат со стороной 2 можно разрезать на 4 квадрата со стороной 1. Но круг ведь не получится разрезать на 4 одинаковых круга?

– Не получится, – согласился Тот. – Но можно иначе сравнить площади. Представь себе, что круг радиуса 2 нарисован на клетчатом папирусе с очень мелкими клетками. Тогда его площадь примерно равна количеству клеток внутри, помноженному на площадь одной маленькой клетки. А теперь измельчим клетки – поделим каждую клетку на 4 ОЧЕНЬ маленькие клетки. Тогда в круге радиуса 1 ОЧЕНЬ маленьких клеток поместится столько же, сколько раньше помещалось маленьких клеток в круге радиуса 2. Поэтому ОЧЕНЬ маленьких клеток в круге радиуса 2 поместится ровно в 4 раза больше, чем в круге радиуса 1.

– Но мы рассуждаем не про сами круги, а про фигуры, которые составлены из квадратиков и только похожи на круги, – возразила Нут. – Ведь площадь круга никак не сможет в точности совпасть с площадью фигуры, составленной из квадратиков. У клеток граница всегда прямая, а у круга – кривая.

– Квантик в таких случаях говорил, что нужно перейти к пределу, – задумчиво протянул Тот, – но этих северных варваров иногда бывает очень сложно понять. Он как-то рассказывал мне, как искать площадь круга «методом исчерпывания», но я почти ничего не понял. Я уловил только, что если клетки всё время измельчать, то в конце концов мы в точности получим площадь круга.





– А мой повелитель Ра говорил, что площадь увеличивается пропорционально квадрату длины, – вспомнила Нут. – Я тогда не поняла, что он имеет в виду, а теперь начинаю понимать.

– Именно так, – согласился Тот и вытащил из сумки карты Верхнего и Нижнего Египта. – Например, при увеличении масштаба карты в 10 раз площади всех провинций, изображённых на ней, увеличатся в 100 раз. Сравни, как выглядит дельта Нила на этих двух картах.

– Значит, нам нужно подобрать масштаб так, чтобы площадь круга удвоилась – заключила Нут.

– Если принять исходный масштаб за 1:1, то в масштабе 2:1 площадь круга увеличивается в 4 раза. Какой же взять масштаб, чтобы площадь круга увеличилась в 2 раза? Может быть, 3:2?

– Нет, не подходит, – тут же посчитал в уме Тот. – Если $3/2$ возвести в квадрат, то получится $9/4$. Это больше, чем 2, на целую четверть.

Нут и Тот долго подбирали разные дроби так, чтобы в квадрате они дали ровно 2, но у них ничего не вышло. Самый лучший результат был у Тота – он придумал дробь $99/70$. В квадрате она равна $9801/4900$, то есть отличается от двойки меньше чем на одну четырёхтысячную.²

Нут и Тот так увлеклись, что даже не заметили, как к ним подошёл Гор, небесный бог с головой сокола, сын Исиды и Осириса. Гор долго прислушивался



Масштаб 1:45 000 000



Масштаб 1:4 500 000

² Оказывается, результат Тота нельзя улучшить, если брать только дроби с двузначными знаменателями. Интересно, что найденная им дробь в точности равна отношению сторон листа бумаги формата А4. Как формат бумаги связан с удвоением квадрата, читайте в «Квантике» №1 за 2017 год (статья Евгения Смирнова «Арифметика листа бумаги»).

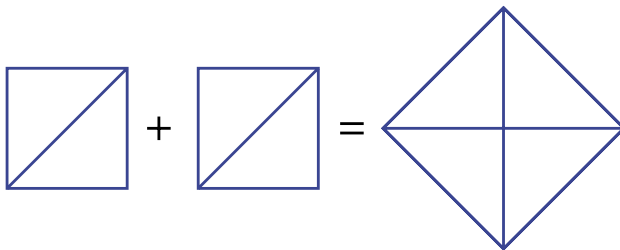
к их разговору и в конце концов понял, что они пытаются сделать.

– Вы пытаетесь удвоить квадрат? – на всякий случай уточнил Гор.

– Привет, Гор! – хором воскликнули Нут и Тот.

– Вообще-то мы пытаемся удвоить круг, – продолжил Тот, – но похоже, что у нас проблемы даже с удвоением квадрата.

– Никаких проблем! – сказал Гор и высек из скалы два одинаковых квадрата. Каждый квадрат он разломил пополам от одного угла к противоположному («по диагонали», как сказал бы Квантик), а из получившихся четырёх треугольников сложил новый квадрат. Нут и Тот в изумлении смотрели на построенное Гором удвоение квадрата.



– Как ловко у тебя получилось! – восхитился Тот. – А мы пытались решить задачу арифметически вместо того, чтобы подумать над геометрическим решением.

– Ты, Тот, два раза спасал меня от смерти, – сказал Гор. – Первый раз – когда меня ужалил скорпион и ты исцелил меня прямо на смертной ладье. Второй раз – когда злодей Сет, убийца моего отца, вырвал у меня глаз, разорвал его на 64 части и разбросал их по всей вселенной. Ты тогда нашёл и собрал почти все эти части, сначала составил из них половину глаза, потом ещё четверть, потом ещё одну восьмую и так далее. Не хватило лишь $1/64$ – так и не найденной части, но ты заменил её силой магии. Исцелённый глаз помог мне воскресить моего отца. Я рад, что теперь был тебе полезен. Магия, которой я научился в загробном царстве (туда по своей воле отправился мой воскресший отец), помогает мне с геометрическими головоломками.

Задача 2. Как удвоить круг?

Продолжение следует

Художник Алексей Вайнер

