НАШ КОНКУРС, IV тур («Квантик» № 12, 2021)

16. *На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Житель А рассказал такую историю: – Встретил я жителей В и С. Первый говорит: «Мы оба лжецы». А второй кивает: «Это правда». Про кого из А, В, С можно однозначно определить, кто он – рыцарь или лжец?*

Ответ: про *А*. Пусть *А* рыцарь. Тогда второй в его истории не мог быть ни рыцарем (ведь тогда, по словам первого, они оба лжецы), ни лжецом (тогда первый тоже соврал, и, значит, они оба лжецы – противоречие). Поэтому *А* – лжец, а остальных однозначно определить нельзя.

17. *Расшифруйте ребус: ТУК + ТУК + ТУК + + ТУК + ТУК = СТУК. (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: СТУК = 1250 или СТУК = 3750.

Запишем ребус иначе: ТУК·5 = СТУК, то есть ТУК·5 = С · 1000 + ТУК, откуда ТУК · 4 = С · 1000, значит, ТУК = С · 250. Поскольку ТУК – трёхзначное число, то либо С = 1 и ТУК = 250, либо С = 2 и ТУК = 500 (но тогда У и К заменены одной цифрой – противоречие), либо С = 3 и ТУК = 750.

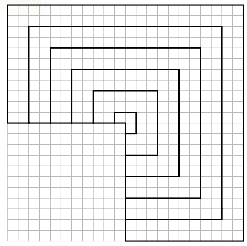
18. *Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?*

Ответ: 181. Если Робинзон не смог сделать выстрел по правилам, то один заряд – это больше, чем 5% имевшихся зарядов. Тогда 20 зарядов – это больше, чем 100% имевшихся зарядов, то есть у него их осталось не более 19. С другой стороны, вчера патронов было хотя бы 20, а осталось не меньше 95% от этого количества, то есть их осталось хотя бы 19. Поэтому Робинзон потратил 200 – 19 = 181 патрон.

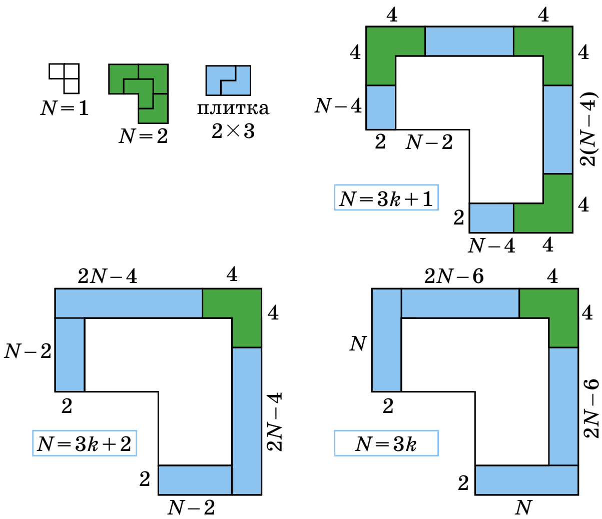
19. *При каких N большой клетчатый уголок, состоящий из трёх квадратов N×N, можно разрезать по линиям сетки на обычные трёхклеточные уголки?*

Ответ: при любых.

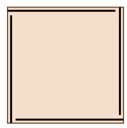
Большой уголок подобно луковице можно разрезать на рамки ширины 2 и, возможно, маленький уголок размера 1, в зависимости от чётности *N*. Значит, достаточно доказать, что можно разрезать любую рамку.



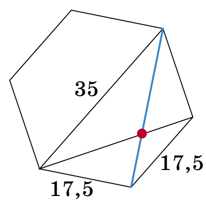
Если заполнять рамку уголками с одного из её концов, неизбежно пары уголков будут объединяться в плитки 2×3. Как именно мы подойдём к первому повороту рамки, зависит от остатка при делении *N* на 3 (см. рисунки).



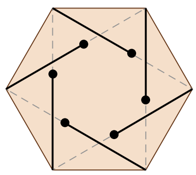
20. *а) Маша испекла торт, имеющий форму квадрата со стороной 21 см. Затем она выбрала внутреннюю точку на одной из сторон и сделала надрез длиной 20 см из этой точки перпендикулярно выбранной стороне. В итоге Маша сделала так для каждой из 4 сторон. Обязательно ли при этом был отрезан хотя бы один кусок? б) Решите ту же задачу, если Маша испекла торт в форме правильного шестиугольника диаметра 35 см и сделала от каждой стороны разрез длиной 20 см перпендикулярно этой стороне.*



Ответ: а) нет (см. рисунок): выберем точки на расстоянии 0,5 см от углов торта, тогда разрезы не пересекутся и ни один кусок не будет отрезан.

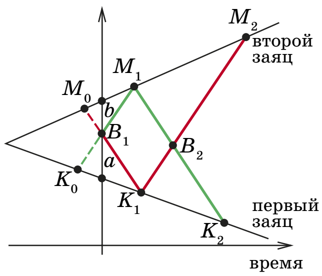


б) В правильном шестиугольнике сторона вдвое меньше большой диагонали (которая и равна диаметру), поэтому красная точка пересечения диагоналей делит синюю диагональ в отношении 2:1. По теореме Пифагора, длина синей диагонали больше 30 см, так как $30^2 + 17{,}5^2 < 35^2$, тогда верхняя часть синей диагонали больше 20 см. Выберем точку на синей диагонали на расстоянии 20 см от верхней стороны – соответствующий разрез не дойдёт до красной точки пересечения диагоналей. Значит, и все остальные разрезы, полученные из этого разреза поворотами, как показано на рисунке, попарно не пересекаются, то есть торт останется целым.



ЗА ДВУМЯ ЗАЙЦАМИ («Квантик» № 1, 2022)

Нарисуем графики движения волка B и зайцев K и M: по горизонтали будем отмечать время, по вертикали – положение животного на прямой (см. рисунок). Получим четыре линии: каждому зайцу соответствует одна прямая, а для волка нарисуем две ломаные линии в зависимости от того, за каким зайцем он погнался вначале. Дорисуем также линии в обратном направлении времени. Обозначим точки встречи животных. Так как волк бегает всегда с одной скоростью, то M_0K_1 параллельна M_1K_2 и K_0M_1 параллельна K_1M_2, то есть $B_1K_1B_2M_1$ – параллелограмм. Тогда волк потратит меньше времени, погнавшись сначала за зайцем M, если $B_2K_2 < B_2M_2$, то есть $B_2K_2 : B_2M_2 < 1$.



Заметим, что $B_2K_2 : B_2M_2 = B_1M_0 : B_1K_0$ (из подобия треугольников $M_0B_1M_1$ и $M_1B_2M_2$ и подобия треугольников $K_0B_1K_1$ и $K_1B_2K_2$). Значит, волк потратит меньше времени, погнавшись сначала за зайцем M, если $B_1M_0 : B_1K_0 < 1$. Но это отношение равно отношению времени, за которое волк встретится с зайцем M, ко времени, за которое волк встретится с зайцем K, если животные побегут навстречу друг другу.

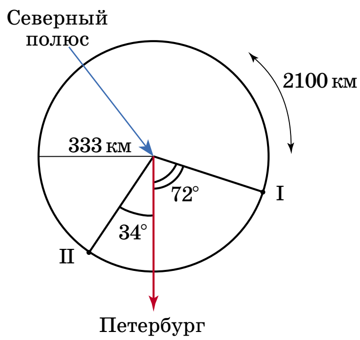
Отсюда ответ: если a и b – расстояния до зайцев K и M, u и v – их скорости, w – скорость волка, то быстрее гнаться сначала за зайцем M, а потом за K, когда $b/(v+w) < a/(u+w)$. В частности, если $a = b$, быстрее гнаться сначала за зайцем, бегающим с большей скоростью.

ПУТЕШЕСТВИЕ ИЗ КАИРА («Квантик» № 1, 2022)

Все меридианы одинаковые, а все параллели в одном полушарии – разной длины. Поэтому 3000 км на север – одно и то же число градусов широты, откуда ни начинай. А 4000 км на восток – чем дальше от экватора, тем большее число градусов. Поэтому путешественники оказались на одной параллели («никто не севернее»), но второй – восточнее, чем первый. Значит, он же и дальше от старта.

Рио-де-Жанейро заметно южнее экватора (23° ю. ш.), и там, наоборот, первый путешественник шёл на восток по более короткой параллели, а второй – почти по экватору. Так что первый восточнее (и, значит, дальше).

Сложнее всего с Санкт-Петербургом. Его широта 60°. Длина меридиана 40 тыс. км, длина одного градуса вдоль меридиана – 40 тыс. : 360 = = 111 км. Так что 3000 км – это 3000 : 111 = 27° на север. Итого 87° северной широты! Это совсем близко к Северному полюсу, всего 3 · 111 = = 333 км от него. Параллели там короткие. На таких расстояниях (333 км – размер Московской области) поверхность Земли почти плоская, так что длина параллели примерно равна 2π · 333 ≈ 2100 км. Итак, второй путешественник пройдёт почти два круга и остановится примерно на 200 км ~ 34° западнее Санкт-Петербурга! (А если учитывать кривизну Земли, то ещё ближе, потому что параллель ещё короче.) Первый же путешественник шёл по параллели длиной 20 тыс. км, вдвое короче экватора, и сместился на восток на (4000 : 20000) × × 360° = 72°. Так что он дальше! Второй «зашёл так далеко на восток, что оказался на западе». Так что первый оказался восточнее, чем второй.



СУММЫ ТРЁХ КУБОВ («Квантик» № 1, 2022)

1. Небольшим перебором можно найти решение $3 = 4^3 + 4^3 + (-5)^3$. Эндрю Букер и Эндрю Сазерленд нашли недавно ещё одно представление:

$$3 = 569936821221962380720^3 + (-569936821113563493509)^3 + (-472715493453327032)^3.$$

Есть ли другие представления – неизвестно.

2. Квадраты дают остатки 0, 1 или 4 при делении на 8. Поэтому сумма трёх квадратов не может давать остаток 7 при делении на 8 (а остальные может). В частности, все числа вида $8k + 7$ не представимы в виде суммы трёх квадратов.

3. Да! Как показано в статье, для $x=6t^3-1$, $y=6t^2$, $z=6t^3+1$ требуемое равенство выполняется с погрешностью всего 2 при любом t. Осталось взять t побольше, чтобы 2 составляло от $6t^3+1$ не больше 0,01% (подойдёт любое $t>11$).

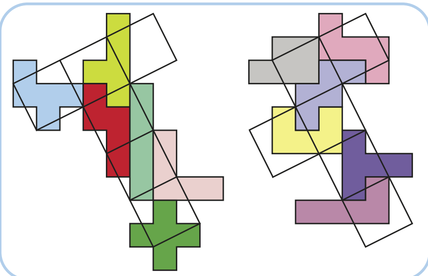
4. Существуют, например

$$(1\cdot100^{33})^3+(2\cdot100^{33})^3+(3\cdot100^{33})^3+(4\cdot100^{33})^3=$$
$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\cdot100^{99}=100\cdot100^{99}=100^{100}.$$

5. Заметим, что $(n+7)^3-(n+6)^3-(n+5)^3+(n+4)^3-(n+3)^3+(n+2)^3+(n+1)^3-n^3=48$ при любом n. С другой стороны, число $(48k+1)^3$ при любом k даёт при делении на 48 остаток 1. Складывая такие кубы, можно получить сумму с заданным остатком от деления на 48; прибавляя или вычитая комбинации, равные 48, можно получить любое число с таким остатком.

ДВА КУБА ИЗ ПЕНТАМИНО

Для обоих кубов показано одно из решений-оклеек на развёртке куба.

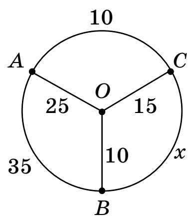


LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. а) Ответ: нет. По дорожкам, ведущим из внутреннего круга на внешний, Костя суммарно прошёл $10+15+20+20=65$ раз. Но он поровну раз перешёл с внутреннего круга на внешний и с внешнего на внутренний, поэтому указанная сумма должна быть чётной!

б) Ответ: 25. Пусть на месте знака вопроса стоит число x.



Каждый раз, когда Костя шёл по дуге AB, проходя через B, он двигался либо по пути A-B-O, либо по пути A-B-C (в каком-то направлении). А ещё он мог проходить через B, не заходя на дугу AB, а поворачивая с OB на BC (или обратно). Значит, *число проходов по дуге AB не превосходит суммарного числа проходов по дорожкам OB и CB*. Поэтому $35\leqslant10+x$, откуда $25\leqslant x$. Изучая аналогично движение Кости по дуге BC через вершину C, получаем, что $x\leqslant10+15$, откуда $x\leqslant25$.

2. Ответ: да. Пусть Маша разрежет верёвку на части 25,5 см и 124,5 см. Тогда куски верёвки с длинами 26, 39 и 60 см придётся вырезать из большей части. Но сумма их длин равна $26+39+60=125$ см – больше длины этой части.

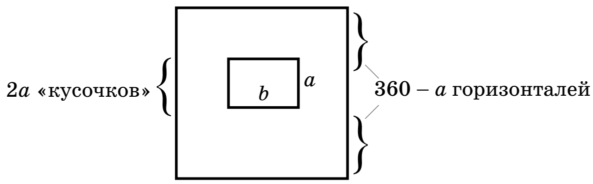
3. Ответ: не могло. Раз столов 6, а девочек 5, каждый день дежурил хоть один мальчик.

Пусть все мальчики дежурили поровну, тогда они отдежурили одинаковое *ненулевое* число раз. Тогда четверо самых низких детей ни разу не дежурили, ведь никто из них не мог быть самым высоким за столом, где сидят пятеро. Значит, эти четверо – девочки.

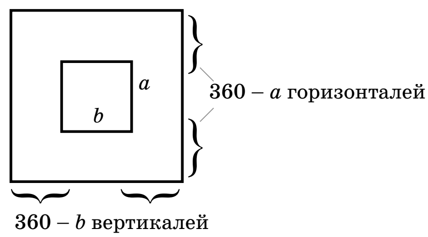
А самый высокий ребёнок дежурил каждый день, то есть 31 раз. Если это был мальчик, то все мальчики отдежурили 31 раз, что невозможно, так как каждый день дежурит всего лишь 6 человек, а не 25. Значит, самый высокий ребёнок в классе – девочка, и она дежурила каждый день.

Поскольку всего девочек 5, каждый день дежурили одна девочка и 5 мальчиков. Тогда за 31 день мальчики отдежурили $5\cdot31$ раз. Это число не делится на 25 (число мальчиков), значит, у мальчиков не могло быть поровну дежурств.

4. Если у дырки $a\times b$ хотя бы одна из сторон не превосходит 120, например $a\leqslant120$, то доска покрывается $360-a$ горизонталями и $2a$ «кусочками» горизонталей, на каждой из этих линий стоит не более одной ладьи, значит, всего не больше $360-a+2a=360+a\leqslant480$ ладей.



Если же a, $b\geqslant120$, то доску можно покрыть $360-a\leqslant240$ горизонталями и $360-b\leqslant240$ вертикалями, всего получится тоже не более 480 ладей.



Замечание. Расставить ровно 480 ладей можно на доске с вырезанным в центре квадратом 120×120 (расставьте!).