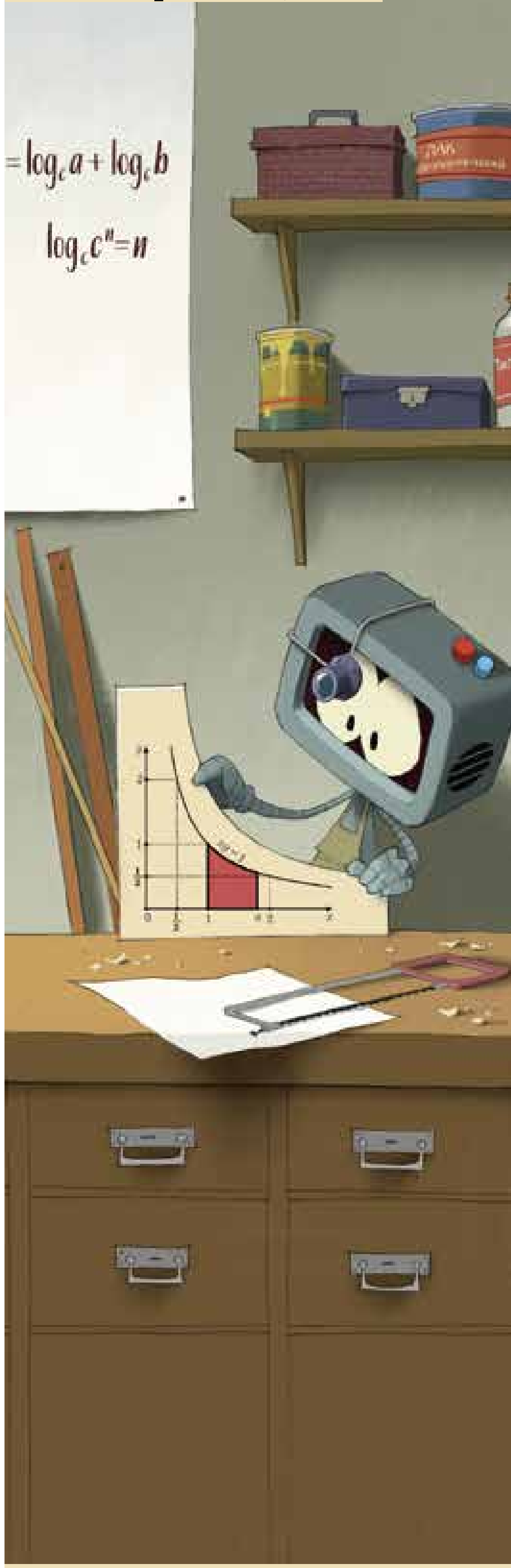
ИЗОБРЕТАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ЛИНЕЙКУ

Окончание. Начало в № 2, 2022

Виктор Клепцын



В прошлом номере напротив отметки 1 см на логарифмической шкале мы поставили число 10. А что если поставить другое число, скажем c? Обозначим расстояние, на котором нужно поставить число a для построения логарифмической шкалы, как $\log_c a$. Должно выполняться аналогичное (1) тождество

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b.$$

Такую шкалу легко получить из шкалы десятичного логарифма: её нужно сжать или растянуть в соответствующее число раз. Функция $\log_c x$ называется *логарифмом по основанию c*. Можно получить тождество, аналогичное тождеству (3):

$$\log_c c^n=n.$$

Оно означает, что логарифм и возведение в степень – это обратные друг другу операции: если взять число n, возвести число c в степень n, а потом применить логарифм по основанию c, то снова получится n. Кстати, это правило позволяет с помощью логарифма определить любую степень, даже нецелую: число c^x – это такое число, логарифм которого равен x.

А теперь построим логарифм. Причём мы расскажем, как это сделать *геометрически*.

А именно, давайте нарисуем график функции $y=\dfrac{1}{x}$ – иными словами, *гиперболу* $xy=1$. И для каждого числа $a>1$ найдём площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного осью абсцисс, нашей гиперболой и вертикальными прямыми $x=1$ и $x=a$ (рис. 9). Обозначим эту площадь через $S(a)$.

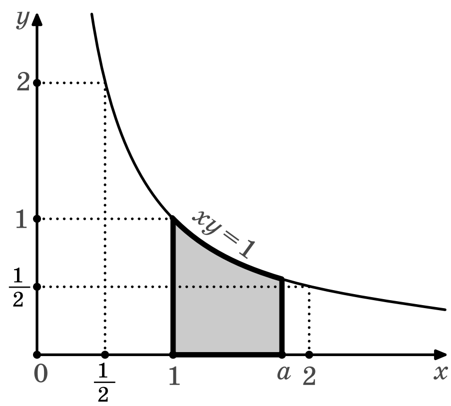


Рис. 9. Гипербола и площадь участка

Мы, конечно, применили сейчас понятие «площадь» к не совсем школьному объекту – криволинейному четырёхугольнику. Но с житейской точки зрения понятно, что какая-то площадь у этой фигуры есть.[1]

Так вот – давайте каждое число a поставим на расстоянии в $S(a)$ сантиметров от «начала отсчёта» (в котором стоит число 1). Оказывается, что при такой расстановке мы тоже сможем умножать числа простым сдвигом линейки, как на рисунке 10. Для этого нам нужно проверить аналогичное (5) тождество

$$S(a)+S(b)=S(ab). \tag{6}$$

И это можно доказать чисто геометрически!

Действительно, пусть a, $b>1$. Тогда $S(ab)$ – это площадь криволинейного четырёхугольника, ограниченного осью абсцисс, гиперболой, прямой $x=1$ и прямой $x=ab$. Прямая $x=a$ разбивает эту фигуру на две части, площадь одной из которых равна $S(a)$ (эта часть на рисунке 10, слева, красного цвета). Значит, нужно проверить, что площадь оставшейся (синей) фигуры равна $S(b)$. Иными словами (если вспомнить, как мы логарифм b определяли), что площади двух фигур, высекаемых из области под гиперболой неравенствами $1 \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant x \leqslant ab$ (они показаны синим на рисунке 10, справа), равны.

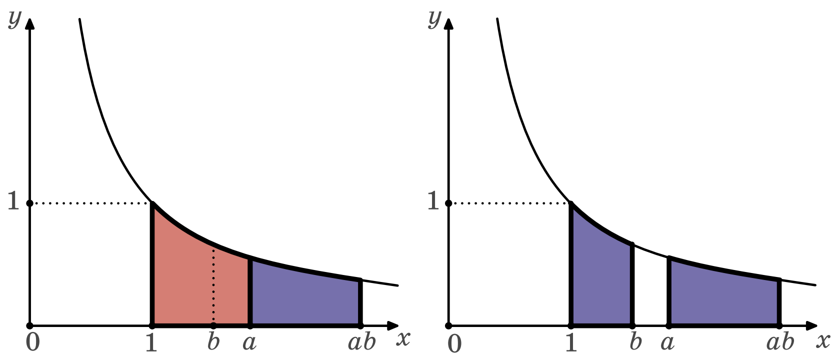


Рис. 10. Проверка тождества

Чтобы это проверить, сожмём всё по горизонтали в a раз – и во столько же раз растянем по вертикали.

Заметим, что вторая из двух синих фигур при этом переходит в первую. Действительно: гипербола

[1] Автор пользуется случаем порекомендовать читателям мультфильм «Площади фигур» на том же сайте «Математические этюды», посвящённый как раз рассказу об определении площади криволинейных фигур: kvan.tk/etudes-area

$xy = 1$ переходит в себя: ведь $\frac{x}{a} \cdot (ay) = xy$. Ось Ox – тоже. И наконец, полоса $a \leqslant x \leqslant ab$ переходит как раз в полосу $1 \leqslant x \leqslant b$.

Но при таком преобразовании сохраняются и площади. Действительно, очень естественно ожидать, что при сжатии по горизонтали в a раз площади всех фигур в a раз и уменьшатся. И это действительно так; можно в это просто поверить, а можно сказать, что это точно правда для любого прямоугольника с горизонтальными и вертикальными сторонами. А если наложить на фигуру мелкую-мелкую сетку, то можно её объединением таких прямоугольников приблизить. Точно так же растяжение по вертикали в a раз площади в a раз увеличивает. А вместе они площади умножают на $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, то есть не изменяют.

Итак, наше преобразование сохраняет площади и переводит вторую из синих фигур на рисунке 10, справа, в первую. Значит, площади этих фигур равны! Вот мы и проверили тождество (6). И тем самым научились (хотя бы теоретически!) создавать логарифмическую линейку.

Площадь $S(a)$, которую мы построили, удовлетворяет такому же соотношению, как и логарифмы, – она превращает произведение в сумму. На самом деле она и есть логарифм по некоторому основанию (потому что все функции, превращающие произведение в сумму, – это функции вида $\log_c$ для некоторого c) и $S(a)$ на самом деле называют *натуральным логарифмом* и обозначают $\ln a$.

Несложно понять, каким условием задаётся основание этого логарифма – его обозначают буквой e. Действительно, раз $\ln e = \log_e e = 1$, то $e > 1$ – это такая абсцисса, что площадь под гиперболой $xy = 1$ от $x = 1$ до $x = e$ равна 1 (рис. 11). И число $e = 2{,}718281828459045...$ – одно из самых замечательных чисел в математике, столь же важное, как всем известное число π.

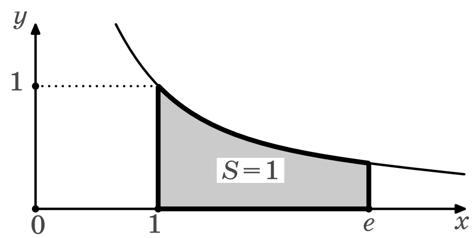


Рис. 11. Определение e: единичная площадь

Художник Алексей Вайнер