Математический КРУЖОК

Николай Авилов

Раскраска квадрата $N \times N$

Выпускники сдают единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Среди его задач есть доступные читателям «Квантика» – например, такая:

Клетки таблицы 7×13 *раскрашены в чёрный и белый цвета. Пар соседних клеток разного цвета всего* 60, *пар соседних клеток белого цвета всего* 78. *Сколько пар соседних клеток чёрного цвета*?

Сначала попробуйте справиться самостоятельно. А вот решение. Любая пара соседних клеток определяется их общей стороной – перегородкой между ними. Всего перегородок $7 \cdot (13-1) + 13 \cdot (7-1) = 162$, поэтому число пар чёрного цвета $162-(60+78) = 24$.

На рисунке 1 дан пример подходящей раскраски. Попробуйте зашифровать так другое слово или число!

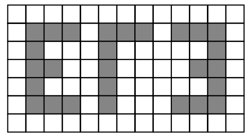


Рис. 1

На этой идее основана задача 24 «Нашего конкурса» («Квантик» №1, 2022). Вот её условие в общем виде:

В белом клетчатом квадрате $N \times N$ *закрашено чёрным несколько клеток. Может ли оказаться, что число пар бело-белых соседних клеток равно числу пар бело-чёрных соседних клеток и равно числу пар чёрно-чёрных соседних клеток? (Соседними считаются клетки с общей стороной.)*

Вот нужные раскраски для $N = 3$, 4, 6, 7, 9 и 10 (рис. 2).

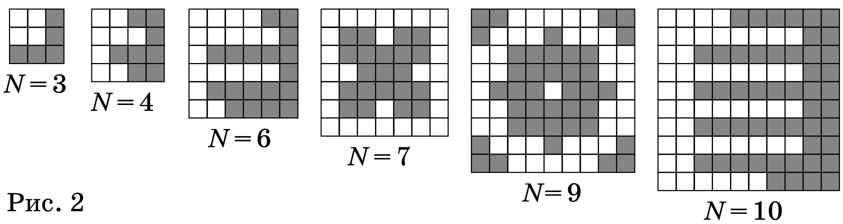


Рис. 2

Для чисел 2, 5, 8, ..., $3k-1$, ... задача не имеет решения. Покажем это. Любая пара соседних клеток определяется их общей перегородкой. Горизонтальных перегородок всего $N(N-1)$: они образуют $N-1$ рядов по N штук (рис. 3), столько же и вертикальных. Всего перегородок $2N(N-1)$, что не делится на 3 при $N = 3k-1$.

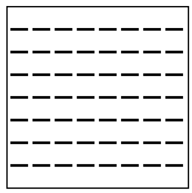


Рис. 3

Для чётных $N \neq 3k-1$ есть общее решение. Поделим квадрат на две равные части ломаной из перегородок, симметричной относительно его центра (рис. 4). Если длина ломаной равна трети всех перегородок, то есть $2N(N-1)/3$, остаётся закрасить одну из половинок квадрата. Так получены раскраски при $N=4$, 6 и 10 (рис. 2).

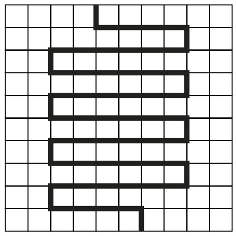
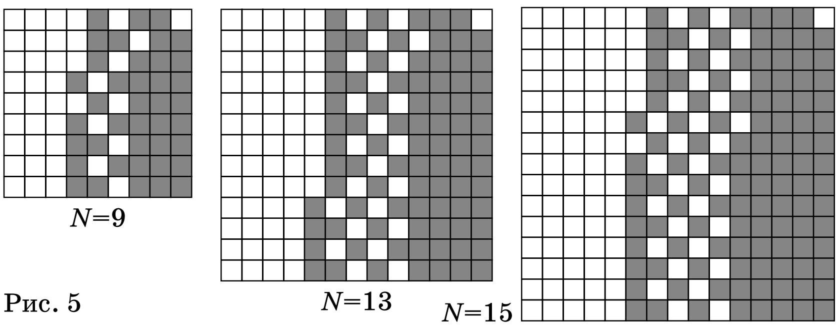


Рис. 4

Этим способом можно раскрасить и бóльшие квадраты. Например, для $N=100$ длина разделительной ломаной равна $2\cdot100\cdot99/3=6600$. Ломаная состоит из 100 вертикальных перегородок и 99 горизонтальных (в помощь – рисунок 4 для $N=10$). Общая длина горизонтальных отрезков равна $6600-100=6500$, среди них 97 отрезков одной, обязательно чётной длины, меньшей 100, и 2 отрезка другой длины. Их нетрудно подобрать, например, 97 отрезков по 66 единиц и 2 отрезка по 49, получится $97\cdot66+2\cdot49=6500$, поэтому общая длина нашей ломаной равна 6600 – как раз треть всех перегородок, что и требовалось.

Впрочем, длина разделительных линий между закрашенными и незакрашенными клетками при любом $N \neq 3k-1$ равна трети всех перегородок. Это облегчает поиск решения и для нечётных квадратов.

Для нечётных $N \neq 3k-1$ решение есть, но красивого общего решения не найдено. С помощью компьютера удалось разобраться с квадратами от 3×3 до 69×69. Найденные решения интересны тем, что квадрат примерно разбивается на три части: белую, «шахматную» и чёрную, плавно перетекающие одна в другую (см. примеры на рисунке 5).



$N=9$ $N=13$ $N=15$

Рис. 5

Возможно, вам удастся заметить закономерности и на их основе найти раскраску для квадрата 19×19.

Художник Мария Усеинова